RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN NO ENTERO, RESUELTAS RESPECTO A LA DERIVADA

CRISTHIAN DAVID MONTOYA ZAMBRANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,

EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN, CAUCA

2009

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN NO ENTERO, RESUELTAS RESPECTO A LA DERIVADA

CRISTHIAN DAVID MONTOYA ZAMBRANO

TRABAJO DE GRADO

En la modalidad de seminario presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Director

Ph.D FRANCISCO ENRÍQUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES,
EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN, CAUCA
2009

Nota de aceptación

Director

Ph.D Francisco Enríquez

Comité evaluador

Ph.D Ramiro Acevedo

Mg. Jhon Jairo Pérez

Fecha de sustentación: Popayán,06 febrero de 2009

Este trabajo se hizo posible gracias a Dios y todas aquellas personas que nos brindaron su apoyo y paciencia durante el proceso. También agradecemos de todo corazón a nuestros familiares y amigos por haber confiado siempre en nosotras

Agradecimientos

Al profesor Francisco Enríquez por su valiosa colaboración.

A los miembros del comité de seguimiento por todos sus aportes.

A la Universidad del Cauca.

A todos aquellas personas que en una u otra forma colaboración en la realización del presente trabajo.

INTRODUCCIÓN

Desde el surgimiento del cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales han sido un campo de investigación tanto teórico como de aplicaciones prácticas. Así, con frecuencia en la bibliografía tanto clásica como contemporánea se tienen referencias sobre importantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en ciencias químicas, biológicas, económicas, dinámica analítica, etc.

En distintos campos de aplicación de esta disciplina se estudia de manera detallada los problemas de valor inicial y de contorno para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Sin embargo en ocasiones surge la necesidad de un formalismo matemático mas apropiado para una descripción adecuada; esto conlleva en algunas situaciones a la aplicación de una herramienta matemática basada en ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) (ecuaciones diferenciales de orden no entero), esto es, ecuaciones en donde las derivadas pueden ser de orden real arbitrario .

En este trabajo se estudiará el análogo del problema clásico de Cauchy, para las ecuaciones diferenciales de orden no entero según Riemann-Liouville, resaltando dos aspectos que a juicio del autor revisten especial interés: por una parte el hecho de que para órdenes enteros de diferenciación, la solución obtenida mediante el "modelo fraccionario" coincide con el resultado clásico, y por otra, el que la EDF permite también resolver eficientemente ciertos problemas de valor inicial para las EDO.

NOTACIÓN

$\mathbb{R}$	campo ordenado de los números reales
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}$
$\mathbb{R}_+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{N}_0$	conjunto de enteros no negativos
$\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$	Conjunto de los números reales menos los enteros negativos
p.c.t.	para casi todo
en c.t.p.	en casi todas partes
$\underset{E}{\rightrightarrows}$	convergencia uniforme en E
$\equiv$	Identidad ó equivalente
$C'(A)$	espacio de funciones continuamente diferenciables en $A \subset \mathbb{R}$
$C^\infty(A)$	espacio de funciones infinitamente diferenciables en $A \subset \mathbb{R}$
$AC([a, b])$	espacio de funciones absolutamente continuas en el segmento [a,b]
$Lip([a, b])$	espacio de funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en [a,b]
$Lp(E)$	espacio de funciones p-Lebesgue integrables en $E \subset \mathbb{R},\ \ 0 < p \leq +\infty$
$I^\alpha\varphi$	integral de orden α de la función φ según Riemann-Liouville
$D^\alpha\varphi$	derivada de orden α de la función φ según Riemann-Liouville
Q	operador de reflexión
$I^\alpha_{a+}(L_1)$	espacio de las integrales fraccionarias de orden α, de las funciones de L_1.
$\mu(E)$	medida de Lebesgue en $E \subset \mathbb{R}$

En lo que respecta a la teoría de la medida, consideramos solamente la medida e integral de Lebesgue.

BREVE RESEÑA HISTORICA DE LA INTEGRO-DIFERENCIACIÓN FRACCIONARIA

La idea de generalizar la noción de diferenciación $\dfrac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$ a valores no enteros de α se remonta al comienzo del cálculo diferencial. El primer intento de tal discusión registrado en la historia fue encontrado en la correspondencia de Leibniz. En una de las cartas de Leibniz en relación con el teorema sobre la diferenciación del producto de funciones, Bernoulli preguntó sobre el significado de este teorema en el caso de diferenciación de orden no entero.

En 1695 Leibniz escribe a G. L'Hôpital y a Wallis (1697) haciendo observaciones sobre la posibilidad de considerar diferenciales y derivadas de orden $\frac{1}{2}$.

En 1738 Leonard Euler observó que el resultado de la evaluación de la derivada $\dfrac{d^n x^p}{dx^n}$, la función potencial x^p podría tener significado para n no entero.

Años después en el tratado de S.F Lacroix (1820) la idea de Euler fue repetida y la fórmula explícita para la evaluación de la derivada $\dfrac{d^{1/2} f(x)}{dx^{1/2}}$ fue presentada.

El siguiente paso fue tomado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1822) quién sugirió la idea de usar la igualdad

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\lambda + \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

para definir las derivadas de orden no entero.

Esta fue la primera definición de la derivada de orden arbitrario positivo apropiada para toda función lo suficientemente "buena", no necesariamente potencial.

Los ejemplos mencionados anteriormente pueden ser considerados como parte de la prehistoria de la integro-diferenciación fraccionaria. La historia propiamente dicha del "cálculo fraccional" comienza con los trabajos de Niels Henrik Abel y J. Louville. En el documento de Abel (1823), la ecuación integral

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\mu}} dt = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \mu < 1$$

fue solucionada en conexión al problema de la Tautocrona. Poco tiempo después (1832-1837) apareció una serie de documentos de Liouville que hizo de él el creador de la substancial teoría de la integro-diferenciación fraccionaria. La definición inicial sugerida por Liouville (1832) se basa en la fórmula de diferenciación de una función exponencial y es aplicable para funciones $f(x)$ que tienen expansión mediante la serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{a_k x}.$$

Para tales funciones la definición de Liouville es

$$D^{\alpha} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} C_k a_k^{\alpha} e^{a_k x}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Las restricciones de tal definición están evidentemente conectadas con la convergencia de la serie. Sorprendentemente de la definición (1) Liouville obtuvo la fórmula para la diferenciación de una función potencial.

En este mismo trabajo Louville deduce no muy rigurosamente la fórmula:

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \varphi(x+t) t^{\alpha-1} dt; \qquad -\infty < x < +\infty, \quad Re\alpha > 0,$$

llamada actualmente (sin el factor $(-1)^{\alpha}$) derivada fraccionaria según Riemann-Louville. Siguiendo en significancia a los trabajos de Liouville, están los documentos escritos por Riemann en 1847 cuando éste era tan solo un estudiante y que sólo fueron publicados en 1876, diez años después de su muerte. Riemann llegó a la expresión

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a,$$

para integración fraccionaria, y desde ese tiempo ella se convirtió en la principal fórmula de integración fraccionaria junto con la construcción de Liouville. En 1867 A. K. Grünwald y en 1868 A. V. Létnikov desarrollan un método de integro-diferenciación basado en la generalización de la fórmula de Riemann

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n},$$

al caso de α no entero:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}.$$

Hay que anotar la existencia de una carta de Létnikov del año 1874 la cual contiene una completa teoría de la integro-diferenciación fraccionaria construida sobre las definiciones de Riemann y Liouville, además de la aplicación de esta teoría a la resolución de ecuaciones diferenciales.

Un periodo adicional en la historia del cálculo fraccionario está relacionado con la fórmula de Cauchy:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi!} \int\limits_{\Omega} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt,$$

para funciones analíticas en el plano complejo. La directa extensión de esta formula a valores no enteros de n conduce a dificultades debido a la multivaluedad de la función $(t-z)^{-n-1}$ y por lo tanto depende de la localización de la curva Ω circundante al punto z y sobre un corte C definido en una rama de la función $(t-z)^{-n-1}$. Aun así, la extensión de la fórmula integral de Cauchy para valores de n no enteros fue desarrollada en primer lugar por Sonine entre 1830 y 1832.

En 1915 Hardy G.H y Riesz M. usaron integración fraccionaria para la sumación de series divergentes. Riesz M., en 1922-1923 demostró el teorema de valor medio para integrales fraccionarias.

Especialmente se debe comentar el trabajo de A. Marshaud (1927) en el que se introduce una nueva forma de derivación fraccionaria:

$$(D^\alpha f)(x) = c \int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \qquad \alpha > 0;$$

donde $(\Delta_t^l f)(x)$ es la diferencia finita de orden $l > \alpha$; $\quad l = 1, 2, 3, ...$, $\quad c$ es constante.
Esta forma coincide con la definición de Louville

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n-1}}; \qquad n = [\alpha] + 1,$$

para funciones "suficientemente buenas".
Finalmente, anotamos la fórmula de "integración fraccionaria" por partes

$$\int_a^b (D_{a+}^\alpha f)(x) g(x) dx = \int_a^b f(x)(D_{b-}^\alpha g)(x) dx,$$

la cual fue dada y demostrada en 1938 por Love y Young.

A partir de 1941 hasta la fecha, las contribuciones científicas referentes al desarrollo del cálculo fraccional se propagan hasta el punto que en 1974 (New Haven, E.U.) se realiza el primer congreso internacional de este tema. En los años de 1984 (Glasgow, Gran Bretaña) y 1989 (Tokyo, Japón) se realizan el segundo y tercer congreso internacional de cálculo fraccional.

Capítulo 1

Integral y derivada fraccionarias sobre un segmento

1.1. Preliminares

A continuación presentamos ciertas definiciones y proposiciones del análisis matemático necesarias para nuestro propósito. Tópicos tales como las integrales dependientes de parámetro, funciones especiales (función Gamma, función Beta, función hipergeométrica de Gauss, función de Mittag-Leffler), teorema de Fubini, fundamentos de la teoría de la medida e integral de Lebesgue y aspectos de la teoría de los espacios de Lebesgue son considerados.

1.1.1. Espacios $Lp(E)$

Las propiedades integrales de las funciones se describen por lo general con ayuda de espacios funcionales. Entre estos, los mas difundidos son los espacios de Lebesgue L_p. En esta sección presentamos ciertas propiedades fundamentales de dichos espacios.

Definición 1. *Sean $\mathbb{R} \supset E$-Lebesgue medible , $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $0 < p \leq +\infty$. Se dice que $f \in Lp(E)$, si y sólo si :*

1. *f es Lebesgue medible en E*

2. *Es finita la expresión*

$$\|f(x)\|_{L_p(E)} := \begin{cases} \left(\int\limits_E |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 0 < p < \infty \\ \underset{x\in E}{supvrai}|f(x)| & si \quad p = \infty, \end{cases} \qquad (*)$$

donde $\underset{x\in E}{supvrai}|f(x)| \overset{not}{=} ess\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$ *se define mediante la expresión*

$$\underset{x\in E}{supvrai}|f(x)| := \inf_{e\subset E} \sup_{x\in E\setminus e} |f(x)|, \;\; \mu(e) = 0.$$

Observación 1. 1. *Consideremos la función*

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Observemos que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \mathfrak{D}(x) = 1$ *y* $\mu(\mathbb{Q}) = 0$*; además* $\sup\limits_{x\in\mathbb{Q}^c} \mathfrak{D}(x) = 0$.
Luego $\underset{x\in\mathbb{R}}{supvrai}\mathfrak{D}(x) = 0$.
Anotamos que bajo ciertas condiciones sobre la función f *y su dominio* E*, se tiene que* $\sup\limits_{x\in E} f = \underset{x\in E}{supvrai} f$.

2. *Si* $0 < p < 1$, $(L_p, ||.||)$ *es un espacio vectorial cuasinormado. Sin embargo para* $p \geq 1$, $(L_p, ||.||)$ *es un espacio vectorial normado.*

3. *Siendo* $1 \leq p \leq +\infty$ *se puede demostrar que si* f, g *son funciones Lebesgue integrables entonces* $cf, f+g, \sup(f,g)$ *y* $\inf(f,g)$ *también son Lebesgue integrables. La demostración de (2)-(3) se basa en las desigualdades de Hölder y Minkowsky.*

4. *Si* $1 \leq p \leq +\infty$ *entonces los espacios* $L_p(E)$ *son de Banach, esto es son completos bajo la métrica inducida por la norma* $(*)$.

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Introducimos aquí la siguiente notación:

$$q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{para} \quad 1 < p < \infty \\ \infty & \text{para} \qquad p = 1 \\ 1 & \text{para} \qquad p = \infty \ . \end{cases}$$

Entonces siempre tenemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Los números p y q se llaman conjugados. Las demostraciones de las siguientes desigualdades pueden ser consultadas en Ulyánov, Dyáchenko [14].

Teorema 1. ***(Desigualdad de Hölder)***. *Sean $E \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$. Si $f \in Lp(E)$ y $g \in Lq(E)$ entonces $fg \in L_1(E)$ y es válida la desigualdad*

$$\|fg\|_{L_1(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_q(E)} \,.$$

Teorema 2. ***(Desigualdad de Minkowsky)*** *Sean $E \subset \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq +\infty$. Si $f, g \in L_p(E)$ entonces $f + g \in L_p(E)$ y además*

$$\|f+g\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)} \,.$$

Anotamos que si $1 \leq p \leq \infty$, $y \in F \subseteq \mathbb{R}^r$, $x \in E \subset \mathbb{R}^s$ y $f \in Lp(E)$, entonces tiene lugar la llamada desigualdad generalizada de Minkowsky:

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{Lp(E)} \leq \int_F \|f(x,y)\|_{Lp(E)} \, dy.$$

Es decir, la norma de la integral no excede la integral de la norma.

A continuación presentamos el teorema de Fubini, que permite reducir el cálculo de la integral de una función $f \in \mathbb{R}^{r+s}$ al cálculo de dos integrales sucesivas, en $\mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}^s$, efectuadas en cualquier orden.

Teorema 3. *(**Teorema de Fubini**) Sea $f \in L_1(E \times F)$ donde $E \subset \mathbb{R}^r$, $F \subset \mathbb{R}^s$, con E y F conjuntos medibles; entonces*

1. *$f(x, \cdot)$ es integrable en F como función de y, p.c.t. $x \in E$.*
2. *$\int\limits_F f(x, y)dy$ es integrable en E como función de x.*
3. *$f(\cdot, y)$ es integrable en E como función de x, p.c.t. $y \in F$.*
4. *$\int_E f(x, y)dx$ es integrable en F como función de y, además son válidas las igualdades:*

$$\int\limits_E \left(\int\limits_F f(x, y)dy \right) dx = \int\limits_F \left(\int\limits_E f(x, y)dx \right) dy = \int\limits_{E \times F} f(x, y)dxdy. \tag{1.1}$$

Teorema 4. *(**Teorema de Tonelli**) Sean $E \subset \mathbb{R}^r$, $F \subset \mathbb{R}^s$, con E y F conjuntos medibles. Si al menos una de las integrales*

$$\int\limits_E \left(\int\limits_F |f(x, y)|dy \right) dx, \qquad \int\limits_F \left(\int\limits_E |f(x, y)|dx \right) dy,$$

es finita, entonces la otra también lo es y además es válida (1.1).

1.1.2. Funciones absolutamente continuas

Definición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f es **absolutamente continua** en $[a, b]$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos, disyuntos dos a dos $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, ..., n$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, se cumple la desigualdad $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.*
El espacio lineal de funciones absolutamente continuas se simboliza AC([a,b]).

Observación 2.

1. *La definición anterior se satisface si la expresión $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ es sustituida por $|\sum\limits_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(a_k))| < \epsilon$.*
2. *El sistema de intervalos disjuntos dos a dos considerado en la definición puede ser numerable, produciendo sumas infinitas en la correspondiente definición.*

Ejemplos.

1. $\varphi(x) = e^x$, es absolutamente continua en $[0, 1]$.

2. La función
$$f(x) = \begin{cases} xcos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$
es continua en $[0, 1]$ pero no es absolutamente continua en dicho segmento.

Ciertas propiedades de las funciones absolutamente continuas se enuncian a continuación (sus respectivas demostraciones pueden encontrarse en Kolmogórov [8]).

1. Toda función $AC([a, b])$ es continua, y por lo tanto uniformemente continua. El recíproco es falso (ver ejemplo 2).

2. Sean $f, g \in AC([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces
$\alpha f + \beta g \in AC([a, b])$, $fg \in AC([a, b])$. Además, si $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \neq 0$, entonces $f/g \in AC([a, b])$.

3. Si $f \in AC([a, b])$, entonces p.c.t. $x \in [a, b]$, $\exists f'(x)$ y además $f' \in L_1([a, b])$.

4. Si $f \in AC([a, b])$ y $f'(x) = 0$ p.c.t. $x \in [a, b]$, entonces f es constante.

5. $\varphi \in AC([a, b])$ si y sólo si
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad f \in L_1([a, b]), \qquad C - constante. \tag{1.2}$$
O sea que la clase $AC([a, b])$ coincide con la clase de primitivas de funciones Lebesgue integrables.

6. Si $f \in L_1([a, b])$, entonces $\varphi'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in [a, b]$, donde φ se determina mediante (1.2). Esto es, toda función AC es la primitiva de su derivada.

Definición 3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $AC^{\,n}([a, b])$ al espacio de funciones $f(x)$ continuamente diferenciables en $[a, b]$ hasta el orden $n - 1$, con $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$.*
Claramente $AC^1([a, b]) \equiv AC([a, b])$. Además $C^{\,n}([a, b]) \subset AC^{\,n}([a, b]) \subset C^{\,n-1}([a, b])$.

El siguiente teorema es la generalización de (1.2), lo que permite caracterizar al espacio $AC^{\,n}([a,b])$. Su demostración puede ser consultada en Natanson [10].

Teorema 5. *El espacio $AC^{\,n}([a,b])$ consta únicamente de las funciones f, representables en la forma*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k,$$

donde $\varphi \in L_1([a,b])$ y c_k son constantes arbitrarias, $k = 0, ..., n-1$.

Según este teorema, la clase $AC^{\,n}([a,b])$ consta de funciones que se representan mediante una integral n-múltiple de Lebesgue de una función sumable, mas un polinomio de grado $n-1$.

1.1.3. Funciones especiales

Presentamos a continuación las definiciones y propiedades principales de algunas funciones especiales.

A . Se llama **función Gamma o integral de Euler de segunda especie** a la integral impropia [1]:

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt. \qquad p > 0.$$

La función Gamma satisface las siguientes propiedades:

a) Converge para $p > 0$. En otro caso la integral diverge.

b) $\forall p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. En particular para $n \in \mathbb{N}_0$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Para $0 < p < 1$ se tiene $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ (Fórmula del complemento).

B . Se llama **función Beta o integral de Euler de primera especie** a la integral impropia:

$$\mathcal{B}(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx; \quad p > 0,\ q > 0.$$

[1]La función Gamma para $p < 0$ se define de la siguiente manera: $\Gamma(p+n) := \dfrac{\Gamma(p+n+1)}{p+n}$, $-(n+1) < p < -n$; $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

La función Beta satisface la relación:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0,\ q > 0.$$

C . **La función hipergeométrica de Gauss** ${}_2F_1(a,b;c;x)$ está definida en el intervalo $(-1,1)$ de la siguiente manera:

$${}_2F_1(a,b;c;x) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt, \quad 0 < b < c. \tag{1.3}$$

La función hipergeométrica de Gauss posee las siguientes propiedades:

a) ${}_2F_1(a,b;c;x) = {}_2F_1(b,a;c;x)$

b) ${}_2F_1(a,b;b;x) = (1-x)^{-a}$.

D . **La función de Mittag-Leffler** es una función entera y está definida mediante la serie:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \quad, \alpha > 0,\ \ \beta > 0.$$

Para más detalles sobre las funciones definidas en A-D, consultar Prúdnikov, Bríchkov, Marichév [11].

En orden a abordar el principal objetivo de este trabajo el cual es el problema de Cauchy para EDF, nos vemos en la necesidad de estudiar algunos tópicos del calculo fraccionario.

1.2. Derivada e integral de orden no entero según Riemann-Liouville sobre el segmento [a,b]

En esta sección presentamos las definiciones de la integral y derivada fraccionaria de Riemann Liouville y sus principales propiedades, considerando como punto de partida la solución de la ecuación integral de Abel.

1.2.1. Ecuación Integral de Abel

La ecuación

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \tag{1.4}$$

donde $0 < \alpha < 1$, es llamada *Ecuación integral de Abel.* Si en (1.4) suponemos que f es conocida y φ desconocida, entonces haciendo uso del teorema de Fubini y permitiendo "cierto comportamiento" a f tenemos que la solución de (1.4) es :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

A fin de establecer condiciones sobre f para que la ecuación integral de Abel sea soluble, consideramos ciertos resultados preliminares. Las respectivas demostraciones se pueden consultar en Samkó, Kilvas, Marichév[13].
Definimos la función auxiliar de f como:

$$f_{1-\alpha}(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

Es claro que si $f \in L_1([a,b])$ entonces $f_{1-\alpha} \in L_1([a,b])$.
El siguiente teorema establece condiciones suficientes y necesarias para la solubilidad de la ecuación integral de Abel.

Teorema 6. *Para que la ecuación de Abel (1.4) con $0 < \alpha < 1$, tenga solución en $L_1([a,b])$, es necesario y suficiente que:*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b]) \quad y \quad f_{1-\alpha}(a) = 0.$$

Observemos que el teorema establece un criterio para la solubilidad de la ecuación integral de Abel en términos de la función auxiliar $f_{1-\alpha}$; sin embargo el lema y corolario siguientes dan condiciones suficientes para la solubilidad de (1.4) a partir de la función f. Las respectivas demostraciones se pueden ver en Bautista, Palechor [3].

Lema 1. *Si* $f \in AC([a,b])$, *entonces* $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ *y además*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\right].$$

Corolario 1. *Si* $f \in AC([a,b])$, *entonces la ecuación integral de Abel es soluble para* $0 < \alpha < 1$ *en* $L_1([a,b])$ *y además su solución puede representarse en la forma:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds\right].$$

1.2.2. Integral de orden no entero según Riemann-Liouville sobre el segmento $[a,b]$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para la integral n- múltiple $\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x f(x)dx$ es conocida la fórmula:

$$(I^n f)(x) \equiv \int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt;\ x \in [a,b] \tag{1.5}$$

que se prueba fácilmente por inducción matemática.
Siendo $\Gamma(n) = (n-1)!$ observamos que la parte derecha de (1.5) puede tener sentido para valores de n no enteros. Es así natural definir la integral de orden no entero de la siguiente manera.

Definición 4. *Sean* $\alpha > 0$ *y* $\varphi \in L_1([a,b])$. *Las integrales*

$$(I^\alpha_{a+}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ \ x > a,$$

$$(I^\alpha_{b-}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt,\ \ x < b,$$

se llaman ***integrales de orden*** α ***según Riemann-Liouville*** *de la función* φ *en* $[a,b]$, *izquierda y derecha respectivamente.*

Observación 3. *1. Observemos que la integral de orden α es la construcción ya conocida a través de la ecuación integral de Abel.*

2. En lo que sigue consideraremos, siempre que no se diga lo contrario, únicamente las integrales I^α_{a+} las cuales denotaremos simplemente por I^α. Esto se debe a que existe una relación sencilla entre estos operadores integrales. Precisamente,

$$QI^\alpha_{a+}\varphi = I^\alpha_{b-}Q\varphi.$$

$$QI^\alpha_{b-}\varphi = I^\alpha_{a+}Q\varphi.$$

donde Q es el ***operador de reflexión*** *definido de la siguiente manera:*

$$(Q\varphi)(x) := \varphi(a+b-x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Por ello resultados similares también tendrán lugar para I^α_{b-}. Esto se constata en el ejemplo 2 a continuación.

Ejemplos.

1. Sea $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ donde $\beta > 0$. Entonces

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Sea $\tau = \frac{t-a}{x-a}$, de donde $(x-a)(1-\tau) = x-t$. Luego,

$$\begin{aligned} (I^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \mathcal{B}(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. Calculemos $I^\alpha_{b-}\varphi$ donde $\varphi = (b-x)^{\beta-1}$, siendo $\beta > 0$ Observemos que este ejemplo puede obtenerse aplicando el operador de reflexión. En virtud del ejemplo 1 sabemos que

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma((\alpha+\beta)} (x-a)^{\beta+\alpha-1},$$

siendo $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$; de manera que

$$Q(I^{\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Pero $QI^{\alpha}_{a+} f = I^{\alpha}_{b-} Qf$ y como $\varphi = Qf$ entonces

$$(I^{\alpha}_{b-} f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

3. Sea $\varphi(x) = x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}$, donde $x \in [0,1]$, $\beta > 0$ y γ arbitrario.

$$(I^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Sea $\tau = \frac{x-t}{x}$, de donde $x(1-\tau) = t$. Luego,

$$(I^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}(1-x(1-\tau))^{\gamma-1}(x\tau)^{\alpha-1} d\tau.$$

Sea $\sigma = 1-\tau$. Entonces

$$(I^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 \sigma^{\beta-1}(1-x\sigma)^{\gamma-1}(1-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma;$$

Usando (1.3) se tiene que

$$(I^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\beta+\alpha-1} F_1(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; x).$$

4. Para la función $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda < 0$ su integral fraccionaria está dada por la expresión:

$$(I^{\alpha}\varphi)(x) = e^{\lambda x}(x-a)^{\alpha} E_{1,\alpha+1}(\lambda x - \lambda a).$$

Los siguientes resultados muestran algunas propiedades de las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville.

Teorema 7. *(Fórmula de integración por partes)*
Sean $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in Lp([a,b])$ *y* $\psi \in Lq([a,b])$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1+\alpha$, $p \geq 1, q \geq 1$. *Entonces se cumple*

$$\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x) dx = \int_a^b \psi(x)(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) dx.$$

Teorema 8. *(Propiedad de semigrupo)*

Sean $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$ *y* $\varphi \in L_1([a,b])$*. Entonces*

$$I^\alpha I^\beta \varphi = I^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Demostración. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}
(I^\alpha I^\beta \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right) dt.
\end{aligned}$$

Para calcular la integral se intercambia el orden de integración, lo cual es válido por el teorema de Tonelli (ver teorema 4). Luego,

$$(I^\alpha I^\beta \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_\tau^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} \right) d\tau.$$

Sea $s = \dfrac{t-\tau}{x-\tau}$, de donde $t = s(x-\tau)+\tau$ y $(x-t) = (x-\tau)(1-s)$. Por ello

$$\begin{aligned}
(I^\alpha I^\beta \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_0^1 \frac{x-\tau}{[(x-\tau)(1-s)]^{1-\alpha}[s(x-\tau)]^{1-\beta}} ds \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) \left(\int_0^1 \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} ds \right) d\tau \\
&= \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}} d\tau \\
&= I^{\alpha+\beta}\varphi(x)\ .
\end{aligned}$$

□

La propiedad de semigrupo se satisface para todo punto si $\varphi \in C([a,b])$ y se verifica en c.t.p. si $\varphi \in L_1([a,b])$. Además si $\alpha+\beta \geq 1$, entonces para $\varphi \in L_1([a,b])$ tal igualdad se cumple en cada punto de [a,b].

En analogía a lo estudiado en los cursos de cálculo, es natural introducir la diferenciación fraccionaria como una operación inversa a la integración fraccionaria.

1.2.3. Derivada de orden no entero según Riemann-Liouville sobre el segmento [a,b]

Definición 5. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si las integrales*

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad x > a;$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \quad x < b,$$

*existen y son finitas, entonces ellas se llaman **derivadas de orden** α **según Riemann-Louville** de la función f en $[a,b]$, izquierda y derecha respectivamente.*

En lo que sigue consideraremos, siempre que no se diga lo contrario, únicamente la derivada D_{a+}^{α} la cual denotaremos simplemente por D^{α}. Resultados similares también tendrán lugar para D_{b-}^{α}.

Ejemplos.

Calculemos las derivadas de orden $\alpha \in (0,1)$ de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$. Entonces

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

   Sea $\tau = \dfrac{t-a}{x-a}$. Luego $x - (x-a)\tau - a = x - t$,
   de donde $(x-a)(1-\tau) = x-t$, y por tanto

$$\begin{aligned}(D^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{[\tau(x-a)]^{\alpha-1}(x-a)}{[(x-a)(1-\tau)]^{\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \mathcal{B}(\alpha, 1-\alpha) = 0.\end{aligned}$$

2. En el caso más general, para $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ con $\mu < 1$, $\alpha + \mu < 1$,

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^{-\mu}}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

   Aplicando el proceso anterior obtenemos:

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}. \tag{1.6}$$

Observación 4. *1. El ejemplo 1 indica que la función $(x-a)^{\alpha-1}$ juega para la diferenciación fraccionaria el mismo papel que la función constante para la diferenciación habitual.*

2. Observemos que hasta el momento hemos definido las derivadas fraccionarias únicamente para $0 < \alpha < 1$. En cambio, las integrales fraccionarias las definimos para todo $\alpha > 0$. Antes de considerar la diferenciación fraccionaria para órdenes de $\alpha \geq 1$, el siguiente teorema nos proporciona condiciones suficientes sencillas para la existencia de las derivadas fraccionarias.

Teorema 9. *Sea $0 < \alpha < 1$. Si $f \in AC[a,b]$, entonces la derivada $D^\alpha f$ existe en casi todas partes, perteneciendo a $L_r(a,b)$, para $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$, y puede también escribirse en la forma:*

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right]. \tag{1.7}$$

Demostración. Dividimos la demostración en tres etapas:

a) La existencia de la derivada $D^\alpha f$ se deduce del Lema 1.

b) La representación de $D^\alpha f$ mediante (1.7) se obtiene al aplicar el corolario 1.

c) Para completar la demostración mostremos que $D^\alpha f$ pertenece a $L_r(a,b)$, para $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$.

Como $D^\alpha f$ se puede expresar mediante (1.7), es suficiente mostrar que

$$\left\| (x-a)^{-\alpha} f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right\|_{L_r([a,b])} < \infty.$$

$$\begin{aligned} \left\| (x-a)^{-\alpha} f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right\|_{L_r([a,b])} &\leq \|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])} |f(a)| \\ &+ \left\| \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right\|_{L_r([a,b])}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])} = \left(\int_a^b (x-a)^{-\alpha r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \ y \ \int_a^b (x-a)^{-\alpha r} dx \text{ converge para } \alpha r < 1.$$

Luego

$$|f(a)|\|(x-a)^{-\alpha}\|_{L_r([a,b])} < \infty \quad \text{para} \quad r < \frac{1}{\alpha}\,.$$

Comprobemos que

$$\left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty\,;$$

como

$$\left|\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right| \le \int_a^b |x-t|^{-\alpha}|f'(t)|dt\,,$$

entonces

$$\left\|\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} \le \left\|\int_a^b (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])}\,,$$

y por la desigualdad generalizada de Minkowsky

$$\left\|\int_a^b (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right\|_{L_{r,x}([a,b])} \le \int_a^b \|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])}|f'(t)|dt.$$

Ahora mostremos que

$$\|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_a^t |x-t|^{-\alpha r}dx + \int_t^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(-\int_a^t (t-x)^{-\alpha r}d(t-x) + \int_t^b (x-t)^{-\alpha r}d(x-t)\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\left[(x-t)^{1-\alpha r}\Big|_{x=t}^{x=b} - (t-x)^{1-\alpha r}\Big|_{x=a}^{x=t}\right]\frac{1}{1-\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}}\left[(b-t)^{1-\alpha r} + (t-a)^{1-\alpha r}\right]^{\frac{1}{r}}\,.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{r} - \alpha > 0$, entonces $1 - \alpha r > 0$, luego

$$(b-t)^{1-\alpha r} \le (b-a)^{1-\alpha r} \quad \text{y} \quad (t-a)^{1-\alpha r} \le (b-a)^{1-\alpha r}, \quad \text{si} \quad a \le t \le b\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |x-t|^{-\alpha r}dx\right)^{\frac{1}{r}} &\le \frac{1}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}}\left[(b-a)^{1-\alpha r} + (b-a)^{1-\alpha r}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{r}}(b-a)^{\frac{1}{r}-\alpha}}{(1-\alpha r)^{\frac{1}{r}}} = M.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_a^b \|(x-t)^{-\alpha}\|_{L_{r,x}([a,b])}|f'(t)|dt \leq M\int_a^b |f'(t)|dt\,,$$

y como $f \in AC([a,b])$, entonces $f' \in L_1([a,b])$ y

$$\left\| \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt \right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

En consecuencia

$$\left\| (x-a)^{-\alpha} f(a) + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt \right\|_{L_{r,x}([a,b])} < \infty.$$

□

Ahora para $\alpha \geq 1$ presentamos las siguientes definiciones:

Definición 6. *Sea* $\alpha \in \mathbb{N}_0$. *Entonces:*

$$D^{\alpha}_{a+} := \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad y \quad D^{\alpha}_{b-} := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D^0 \equiv Id$$

entendiendo estas derivadas en el sentido habitual.

Definición 7. *Sea* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *con* $\alpha > 1$, $[\alpha]$ *la parte entera de* α *y* $\{\alpha\}$ *la parte fraccionaria de* α, $0 < \{\alpha\} < 1$. *Así* $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. *Definimos las derivadas de orden* α *mediante las fórmulas:*

$$D^{\alpha}_{a+}f := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{a+}f := \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f,$$

$$D^{\alpha}_{b-}f := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{b-}f := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f.$$

De esta manera,

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \tag{1.8}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt, \tag{1.9}$$

donde $n = [\alpha] + 1$.

Ejemplo. Siendo $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ con $\mu < 1$ y $\alpha + \mu < 1$, y de acuerdo con (1.6),

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.$$

Se puede mostrar que la anterior igualdad es cierta para todo $\alpha > 0$ y además

$$(D^\alpha f)(x) = 0 \quad si \quad f(x) = (x-a)^{\alpha-k}, \quad k = 1, 2, ..., 1 + [\alpha].$$

En efecto, para $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ con $\mu < 1$ y $\alpha + \mu < 1$,

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{(t-a)^{-\mu}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt,$$

Sea $\tau = \dfrac{t-a}{x-a}$. Luego $x - (x-a)\tau - a = x - t$,
de donde $(x-a)(1-\tau) = x - t$, y por tanto

$$\begin{aligned}
(D^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha-\mu} \int_1^0 \tau^{-\mu}(1-\tau)^{-\alpha+n-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{B}(1-\mu, n-\alpha) \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha-\mu} \\
&= \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Para el caso en que $f(x) = (x-a)^{\alpha-k}, \quad k = 1, 2, ..., 1 + [\alpha]$,

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Aplicando el proceso anterior obtenemos:

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\mathcal{B}(\alpha-k+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-k} = 0.$$

Observación 5. *1. Una condición suficiente para la existencia de las derivadas (1.8) y (1.9) es*

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \in AC^{[\alpha]}([a,b]),$$

esta condición también se satisface si $f \in AC^{[\alpha]}([a,b])$.

1.2.4. Diferenciación e integración fraccionaria como operaciones inversas

Sabemos que las operaciones de diferenciación e integración no son operaciones inversas en el sentido estricto: $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$; sin embargo, $\int\limits_a^x \varphi'(t)dt \neq \varphi(x)$ debido a la aparición de la constante $-\varphi(a)$. Así mismo $(\frac{d}{dx})^n I_a^n \varphi(t) = \varphi$, pero $I_a^n \varphi^n \neq \varphi$, difiriendo de φ en un polinomio de orden $n-1$.

Es natural esperar que $D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi$, aunque $I^\alpha D^\alpha \varphi$ no necesariamente coincida con $\varphi(x)$ debido a la aparición de las funciones $(x-a)^{\alpha-k}$, donde $k = 1, 2, ..., [\alpha]+1$ las cuales juegan el papel de polinomios para la diferenciación fraccionaria.

Definición 8. *Sea $\alpha > 0$. Definimos $I^\alpha(L_1)$ como el espacio de funciones representables por una integral fraccionaria derecha de orden α de alguna función sumable.*

El siguiente teorema caracteriza el espacio $I^\alpha(L_1)$, su respectiva demostración puede encontrarse en Bautista, Palechor [3].

Teorema 10. *Sea $\alpha > 0$. Entonces $f(x) \in I^\alpha(L_1)$ si y sólo si*

$$f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha} f \in AC^{\,n}([a,b]),$$

donde $n = [\alpha]+1$ y además

$$f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0 \qquad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.10}$$

Observación 6. (*a*) *Enfatizamos en conexión con la definición 8 que la representación de una función $f(x)$ mediante una integral fraccionaria de orden α y la existencia de la derivada fraccionaria de este orden para $f(x)$ son cosas diferentes. Por ejemplo, la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, tiene derivada fraccionaria α igual a cero, sin embargo la función $(x-a)^{\alpha-1}$ no se puede representar mediante la integral fraccionaria de orden α de función sumable alguna (para ella $f_{1-\alpha}(a) \neq 0$).*

(b) *Si asumimos que* $D^\alpha f = (\frac{d}{dx})I^{1-\alpha} f$ *existe en casi todas partes, entonces debemos tomar en consideración lo siguiente. Sabemos que la existencia de derivada sumable* $g'(x)$ *de una función* $g(x)$ *no siempre garantiza la restauración de* $g(x)$ *como la primitiva. Es decir, en general* $\int_a^x g'(t)dt \neq g(x) + c$ *(ver por ejemplo, Natanson* $[1, pag199]$*). Mas aún, existe una función continua monótona* $g(x)$*, donde* $g(x) \neq const$ *tal que* $g'(x) = 0$ *en c.t.p. Este tipo de "fenómenos" son eliminados si tratamos con funciones absolutamente continuas.*

Por estas razones la suposición de que " la derivada fraccionaria $D^\alpha f$ existe en casi todo punto y es sumable " es insuficiente para el desarrollo de una teoría satisfactoria. Así que es necesario dar un sentido más fuerte a la existencia de D^α :

Definición 9. *Sea* $\alpha > 0$*. Diremos que una función* $f \in L_1(a, b)$ *tiene derivada fraccionaria sumable* $D^\alpha f$ *, si* $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b]), \quad n = [\alpha] + 1.$

Notemos que si $D^\alpha f = (\frac{d}{dx})^n I^{n-\alpha} f$ existe en el sentido usual, entonces $f(x)$ tiene una derivada en el sentido de la definición 9. En efecto, si $D^\alpha f = (\frac{d}{dx})^n I^{n-\alpha} f$ existe en el sentido usual entonces $I^{n-\alpha} f \in C^{\,n}([a, b])$.
Puesto que $C^{\,n}([a, b]) \subset AC^{\,n}([a, b]) \subset C^{\,n-1}([a, b])\,;\ n \in \mathbb{N}$, entonces $I^{n-\alpha} f \in AC^{\,n}([a, b])$.
El siguiente teorema establece la principal relación entre los operadores de integración y diferenciación fraccionaria (su respectiva demostración puede encontrarse en Bautista, Palechor [3]).

Teorema 11. . *Sea* $\alpha > 0$*. Entonces la igualdad:*

$$D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi, \tag{1.11}$$

es válida para cualquier función sumable φ*, mientras que*

$$I^\alpha D^\alpha \varphi = \varphi \tag{1.12}$$

se satisface para

$$\varphi \in I^\alpha(L_1). \tag{1.13}$$

Si asumimos en lugar de (1.13) que $\varphi \in L_1(a,b)$ *con derivada sumable* $D^\alpha\varphi$ *(en el sentido de la definición 9) entonces (1.12) no es verdadera en general, y se reemplaza por el siguiente resultado:*

$$I^\alpha D^\alpha \varphi = \varphi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a) \ , \tag{1.14}$$

donde $n = [\alpha] + 1$ *y* $\quad f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha} f$. *En particular , cuando* $n = 0$ *tenemos:*

$$I^\alpha D^\alpha \varphi = \varphi - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_{1-\alpha}(a) \quad ; \tag{1.15}$$

donde $0 < \alpha < 1$.

Capítulo 2

Aplicación del cálculo fraccional a las ecuaciones diferenciales

En este capítulo presentamos algunas definiciones generales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), mostrando además uno de los teoremas de existencia y unicidad básicos (debido a Cauchy). Como aplicación de la integro-diferenciación fraccionaria estudiamos el análogo del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden no entero (EDF) mediante el método de Picard.

2.1. Conceptos generales

En esta sección consideraremos $n \in \mathbb{N}$.

Definición 10. *Llamaremos* ***ecuación diferencial*** *(ED) a una ecuación que relaciona una función (una variable dependiente), con sus variables (variables independientes), y sus derivadas. Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente entonces se dice que es una* ***ecuación diferencial ordinaria*** *(EDO); y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o mas variables independientes se llama* ***ecuación diferencial en derivadas parciales*** *(EDDP).*

En lo que sigue nos ocuparemos sólo de EDO y salvo que el contexto nos indique otra notación, utilizaremos x para denotar la variable independiente e y para la variable dependiente.

Definición 11. *Se llama **orden** de la EDO al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.*

Definición 12. *Decimos que una EDO de orden n está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \ ,$$

*siendo F una función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ con Ω generalmente abierto en R^{n+2}. Decimos que la ecuación está expresada en forma **explícita o resuelta respecto a la derivada de mayor orden** cuando tenemos*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \ ,$$

con $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto D (generalmente abierto) de R^{n+1}.

Definición 13. *Se dice que una EDO es **lineal** si tiene la forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \ ;$$

*y se llama **lineal homogénea** si además $g(x) = 0$. Una EDO que no es lineal se dice **no lineal**.*

Definición 14. *Decimos que una función $y = \varphi(x)$ definida en un intervalo I (abierto o cerrado) (es decir, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) es solución de una ED en dicho intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.*

Una solución de una EDO puede ser de tres tipos: general, particular o singular.

Una solución general es aquella que contiene constantes arbitrarias igual en número al orden de la ecuación.

Una solución particular de una EDO es aquella que se obtiene de la solución general dando uno o mas valores particulares a las constantes.

Una solución singular de una EDO es una solución sin constantes arbitrarias que no puede obtenerse a partir de la solución general.

Para finalizar esta sección mostramos a manera de ejemplo, algunas ecuaciones especiales de la teoría de las EDO.

Ejemplos 1. La ecuación de primer orden de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\beta}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$, se llama *ecuación de Bernoulli*. Es claro que si $\beta = 0$, la EDO anterior es lineal y, si $\beta = 1$ es de variables separables. En otro caso, se hace la sustitución $z(x) = y^{1-\beta}(x)$, con lo que la EDO de Bernoulli se transforma en una lineal.

Ejemplos 2. La ecuación de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

donde φ y ψ representan funciones continuamente diferenciables, recibe el nombre de *ecuación de Lagrange*. En el caso particular en que $\varphi(y') = y'$, la ecuación recibe el nombre de *ecuación de Clairaut*.

Ejemplos 3. La EDO lineal

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = f(x),$$

donde a_n son constantes, $a_n \neq 0$, se llama EDO *de Euler*. Con la sustitución $x = e^z$, convertimos la ecuación de Euler en una EDO con coeficientes constantes.

2.2. Problema de Cauchy para la EDO de primer orden, resuelta respecto a la derivada

Dada una EDO, la primera cuestión natural a considerar es la existencia de soluciones. Un aspecto importante a resaltar es el tipo de soluciones que buscamos, es decir las propiedades que tienen dichas soluciones. En este sentido presentamos algunos conceptos que nos conducirán a un resultado sobre la existencia de soluciones continuas.

Definición 15. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supondremos siempre que Ω satisface las dos condiciones siguientes:*

1. *Ω es un conjunto abierto. Esto es, para todo punto $p_0 \in \Omega$ existe un radio $r > 0$ tal que todo punto p en $\mathbb{R}^2$ cuya distancia a p_0 es inferior a r $(||p - p_0|| < r)$ pertenece a Ω.*

2. *Ω es conexo. Es decir, no es posible encontrar dos conjuntos abiertos no vacíos Ω_1, Ω_2 tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$.*

Se dice entonces que Ω es un dominio de $\mathbb{R}^2$.

Definición 16. *Sea f una función de valor real definida sobre $[a, b]$. Decimos que f satisface la condición de Lipschitz en $[a, b]$ si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \; ; \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{2.1}$$

El espacio de funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en $[a, b]$ se denota $Lip([a, b])$. De la anterior definición se deduce que si $f \in Lip([a, b])$ entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$. Además, si $f \in C'([a, b])$ entonces $f \in Lip([a, b])$.

El siguiente teorema es un resultado general sobre espacios métricos completos. Su respectiva demostración puede ser consultada en Kolmogórov [8].

Teorema 12. ***(Teorema del punto fijo de Banach)*** *Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una aplicación tal que existe un número real $0 < \lambda < 1$ de modo que:*

$$d(T(x), T(y)) < \lambda d(x, y)\,; \qquad \forall\ x, y \in M.$$

Entonces existe un único $x \in M$ tal que $T(x) = x$.

Las aplicaciones T que cumplen la propiedad indicada se llaman *contracciones*. Los puntos x que cumplen $T(x) = x$ se llaman *puntos fijos de* T. El teorema afirma que toda contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

Abordamos a continuación el primer objetivo principal de esta sección, el problema de Cauchy para EDO de primer orden, resueltas respecto a la derivada.

Planteamiento del problema

Dada una EDO de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.2}$$

definida sobre un dominio Ω que contiene el punto (x_0, y_0), el *problema de Cauchy* consiste en determinar una solución $y = y(x)$ de (2.2) que satisfaga la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.3}$$

Uno de los resultados generales de la teoría de EDO, que se aplica tanto a los casos lineales como no lineales, es el siguiente teorema debido a Cauchy.

Teorema 13. *i) Sea $f(x, y)$ una función de valor real continua en Ω y que además satisface la condición de Lipschitz respecto a y:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

ii) Sea $R = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, donde (x_0, y_0) es un punto interior de Ω y a, b constantes positivas.

Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

tiene solución sobre el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$*, donde* $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \sup\limits_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$*. Si además* $\delta < \frac{1}{L}$ *entonces (2.4) tiene una única solución.*

La demostración que presentamos a continuación muestra dos aspectos de gran interés: por una parte la aplicación del teorema del punto fijo de Banach (ver punto 3) de donde se deduce tanto la existencia como la unicidad de la solución, y por otra, el método de aproximaciones sucesivas (método de Picard) empleado en la prueba de la existencia de soluciones. Señalamos que el método de Picard proporciona una demostración constructiva de la existencia de soluciones para la EDO; precisamente por esta razón lo presentamos, puesto que dicha construcción nos permitirá hallar la solución de ciertas EDF (ver sección 2.3.1).

Demostración. Consideraremos cuatro etapas.

1. El problema (2.4) es equivalente a la ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{2.5}$$

Es decir $y(x)$ es solución del problema de Cauchy si y sólo si $y(x)$ es solución de (2.5). En efecto:

$\Rightarrow$) Suponemos que $y(x)$ satisface el problema de Cauchy, entonces

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Luego

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt + C\,, \quad C - constante.$$

Como $y(x_0) = y_0$, entonces $C = y_0$ y por lo tanto y satisface la ecuación integral (2.5).

$\Leftarrow$) Si y satisface la ecuación integral, entonces diferenciando tenemos:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)),$$

esto es, y satisface la ecuación diferencial (2.2), además (2.5) muestra que $y(x_0) = y_0$.

En conclusión, el problema de Cauchy es equivalente a la ecuación integral $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.

2. Claramente $|f(x,y)| \leq M = \sup\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$; $\forall (x,y) \in R$. Sean $\delta = \text{mín}\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ y $E = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

   Examinemos detenidamente el número δ definido anteriormente. Si $a < \frac{b}{M}$ entonces $\delta = a$ y la solución del problema de Cauchy está definida para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Si $\frac{b}{M} < a$ entonces $\delta = \frac{b}{M}$ y la solución se tiene únicamente para todos los puntos de E.

   Consideremos la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(x) & = & y_0 \\ \varphi_1(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \end{array} .$$

   Veamos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente sobre E a la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt.$$

Realizamos esta prueba en cuatro etapas:

a. Como consecuencia de la continuidad de f, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n(x)$ es continua sobre E. Además para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b$.

En efecto,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_{n-1}(t))|dt \\ &\leq M \int_{x_0}^{x} dt = M|x - x_0| \leq M\delta \leq b. \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite concluir que $y_0 - b \leq \varphi_n(x) \leq y_0 + b$ y por lo tanto $f(x, \varphi_n(x))$ está bién definida, ya que $(x, \varphi_n(x)) \in R$.

b. Afirmamos que

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}\delta^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E. \tag{2.6}$$

Realicemos la demostración usando el principio de inducción matemática:

• Si $n = 1$ entonces

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = |\varphi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(t))|dt \leq M|x - x_0| \leq M\delta.$$

• Supongamos que (2.6) se cumple para $n = m$ es decir,

$$|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| \leq \frac{ML^{m-1}\delta^m}{m!} \quad ;$$

y mostremos que (2.6) se cumple para $n = m + 1$. En efecto, como f satisface la condición de Lipschitz respecto a y sobre $R \subset \Omega$, se tiene que para algún $L > 0$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}(f(t,\varphi_m(t))-f(t,\varphi_{m-1}(t)))dt\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi_m(t))-f(t,\varphi_{m-1}(t))|dt \leq L\int_{x_0}^{x}|\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)|dt \\
&\leq L\int_{x_0}^{x}ML^{m-1}\frac{|t-x_0|^m}{m!}dt \leq L^m M\frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

En virtud del principio de inducción matemática concluimos que (2.6) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

c. Por la parte **b** tenemos:

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}\delta^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E.$$

Como $\frac{M}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(L\delta)^j}{j!} = \frac{M}{L}(e^{L\delta}-1)$, en virtud del criterio M de Weierstrass [1] se concluye que

$$\varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x))$$

converge absoluta y uniformemente sobre E a una única función $\varphi(x)$. Luego,

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

d. Probemos que $\varphi(x)$ es solución de la ecuación integral (2.5) para todo x en E. En efecto, como $f(x,y)$ es continua en Ω y $\varphi_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x,\varphi_n(x)) = f(x,\varphi(x)).$$

[1] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto X. Supongamos que $|f_n(x)| \leq M_n$; $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en X si $\sum M_n$ converge.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))dt \\ &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(t,\varphi_n(t))dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que la función $\varphi(x)$ es solución del problema de Cauchy descrito en (2.4).

3. Para mostrar la unicidad de la solución, consideremos el siguiente espacio lineal:

$$C^* := \{g \in C(E) : |g(x) - y_0| \leq b\}.$$

El espacio C^* con la métrica estándar es completo, ya que representa un subespacio cerrado del espacio completo de todas las funciones continuas sobre E. La afirmación de que C^* es cerrado se tiene del hecho de que cualquier sucesión convergente en E converge uniformemente a una función continua perteneciente a C^*.
Definimos la aplicación $T : C^* \to C(E)$ mediante la fórmula

$$T\varphi(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.$$

Esta aplicación transforma el espacio C^* en sí mismo y es contracción. En efecto, si $\varphi \in C^*$ entonces

$$|T\varphi(x) - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right| \leq M\delta \leq b,$$

y por consiguiente, $T(C^*) \subset C^*$. Además [2],

$$\begin{aligned}|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| &\leq \max_{x\in E}\int\limits_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))|dt \\ &\leq \max_{x\in E}\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \leq L\delta \max_{x\in E}|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.\end{aligned}$$

[2] $T(C^*)$ indica la imagen del conjunto C^* mediante la aplicación T.

Puesto que $L\delta < 1$, la aplicación T es contracción y en virtud del teorema 12 se deduce que la ecuación $Ty = y$ (es decir, la ecuación (2.5)) tiene una única solución en el espacio C^*.

$\square$

La siguiente sección tiene como objetivo principal el estudio del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) usando como herramienta principal los operadores de integración y derivación fraccionarias.

2.3. Problema de Cauchy para EDF

Las ecuaciones diferenciales de orden no entero (EDF) son estudiadas tanto en los espacios de funciones regulares, esto es, funciones sumables con cierta potencia, continuas y diferenciables en el sentido clásico un numero suficiente de veces, como también en distintos de espacios de funciones generalizadas. En esta sección mostramos el planteamiento del problema de Cauchy para EDF, estudiando la solubilidad de éste en ciertos espacios de funciones. También consideraremos como aplicación de la teoría de la integro-diferenciación fraccionaria la resolución de algunas EDF. Información mas detallada sobre la solución del problema de Cauchy para las EDF, y temas relacionados, puede consultarse en Samko, Kilvas, Marichev [13].

Definición 17. *Las ecuaciones diferenciales en las que la función incógnita $y \equiv y(x)$ se encuentra bajo el operador de diferenciación fraccionaria, es decir,*

$$F(x, y, D^{\alpha_1}y, D^{\alpha_2}y, ..., D^{\alpha_n}y) = 0 \ ; \qquad \alpha_j > 0\,; \quad \textit{para todo} \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{2.7}$$

se denominan Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario (EDF). Por analogía con la teoría clásica de las EDO, las EDF se clasifican en lineales, homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes y variables.

En ciertas aplicaciones surge la necesidad de resolver el análogo del problema de Cauchy para EDF. Por ejemplo, supongamos que se debe hallar la solución $y(x)$ de la ecuación (2.7) que satisfaga las condiciones iniciales

$$D^{\alpha_j} y(x)|_{x=x_0} = b_j, \qquad para \;\; \alpha_j > 0\,,\; j = 1, ..., m\;,\; x_0 \in \Omega;$$

entonces se dice que se busca la solución del *problema de Cauchy* para la ecuación (2.7).

En este capítulo solamente consideraremos EDF resueltas respecto a la derivada fraccionaria de mayor orden, también presentaremos el problema de Cauchy para las EDF de orden α, con $\alpha \in (0, 1]$. En el capítulo siguiente mostraremos el problema de Cauchy para las EDF resueltas respecto a la derivada fraccionaria de mayor orden.

Planteamiento del problema

Supongamos que se debe hallar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial

$$D^{\alpha} y(x) \equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = f(x, y), \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{2.8}$$

bajo la condición inicial [3]

$$I^{1-\alpha} y(+0) \equiv \left. \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) \right|_{x=0+} = b, \tag{2.9}$$

donde $f(x, y)$ es una función dada y b constante.

Representamos por R_1 el siguiente conjunto:

$$R_1 := \left\{ (x, y) \in \Omega : 0 < x \leq h, \left| x^{1-\alpha} y - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq a \right\},\, a > \frac{Mh}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donde a, h y d son ciertas constantes.

Teorema 14. *Sea $f(x, y)$ una función de valor real continua y acotada en Ω que satisface respecto a y la condición de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|; \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

Entonces existe una única solución continua del problema de Cauchy descrito en (2.8), (2.9) en el dominio R_1 para h lo "suficientemente pequeño".

[3] La expresión $x = 0+$ significa que x tiende a cero por la derecha. Similarmente, $f(+0) := \lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Demostración. Consideremos cuatro etapas.

1. La ecuación (2.8) junto con la condición inicial (2.9) es equivalente a la ecuación integral
$$y(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y)dt. \tag{2.10}$$
Es decir, $y(x)$ es solución del problema de Cauchy si y sólo si $y(x)$ es solución de (2.10), y por tanto el problema descrito en (2.8) y (2.9) se reduce a (2.10). En efecto:

$\Rightarrow$) Suponemos que $y(x)$ satisface el problema de Cauchy entonces
$$D^{\alpha}y(x) = f(x, y(x)). \tag{2.11}$$
Integrando (2.11) donde $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I^{\alpha}$ tenemos
$$I^{\alpha}D^{\alpha}y(x) = I^{\alpha}f(x, y(x)).$$
Teniendo en cuenta la relación entre los operadores I^{α} , D^{α} descrita en (1.14) y la condición (2.9) , obtenemos :
$$y(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + (I^{\alpha}f(x, y(x)).$$
Por lo tanto y satisface la ecuación integral (2.10).

$\Leftarrow$) Si y satisface la ecuación integral (2.10), entonces
$$D^{\alpha}y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha}x^{\alpha-1} + D^{\alpha}I^{\alpha}f(x,y),$$
y tenemos que $D^{\alpha}y(x) = f(x,y)$ como consecuencia del teorema 11.

La condición inicial dada en (2.9) se sigue del hecho de que
$$I^{1-\alpha}y(x) \equiv \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}I^{1-\alpha}x^{\alpha-1} + I^{1-\alpha}I^{\alpha}f(x,y) = b + \int_0^x f(t, y(t))dt.$$
Los argumentos que siguen son similares a los expuestos en la demostración del teorema 13.

2. Consideremos la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(x) & = & \dfrac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ , \\ \varphi_1(x) & = & \varphi_0(x) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi_0(t)) dt \ , \\ \ldots. & . & \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) & = & \varphi_0 + (I^\alpha f(x, \varphi_{n-1}))(x) \\ \ldots. & . & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Afirmamos que si $x \in (0, h]$ entonces $(x, \varphi_n(x)) \in R_1$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \left| x^{1-\alpha}\varphi_n(x) - \dfrac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| & = & \left| x^{1-\alpha}(I^\alpha f(x, \varphi_{n-1}))(x) \right| \\ & \leq & \dfrac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x |(x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi_{n-1}(t))| dt \\ & \leq & M \dfrac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ & \leq & \dfrac{Mx}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \dfrac{Mh}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{array}$$

Si $\dfrac{Mh}{\Gamma(\alpha+1)} < a$ entonces $(x, \varphi_n(x)) \in R_1$, para todo $x \in (0, h]$.

Veamos que $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente en $(0, h]$ a la solución de la ecuación integral (2.10).

Realizamos esta prueba en cuatro etapas:

a. Afirmamos que

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Razonando inductivamente tenemos:

• Si $n = 1$ entonces

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int\limits_0^x |(x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi_0(t))| dt \right| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \leq \frac{Mh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

• Supongamos que (2.12) se cumple para $n = m$, es decir,

$$|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| \leq \frac{ML^{m-1}h^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)},$$

y mostremos que (2.6) se cumple para $n = m+1$. Como f satisface la condición de Lipschitz respecto a y sobre $R_1 \subset \Omega$, se tiene que

$$|\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(f(t,\varphi_m(t)) - f(t,\varphi_{m-1}(t)))dt \right|$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|(f(t,\varphi_m(t)) - f(t,\varphi_{m-1}(t)))|dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)|dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \frac{ML^{m-1}}{\Gamma(m\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{m\alpha}dt \leq \frac{L^m M h^{(m+1)\alpha}}{\Gamma((m+1)\alpha+1)}. \end{aligned}$$

En virtud del principio de inducción matemática concluimos que (2.12) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

b. Teniendo en cuenta lo expuesto en la parte **a** tenemos:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como[4]

$$\frac{M}{L}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha+1)} = \frac{M}{L}\left(E_{\alpha,1}(Lh^\alpha) - 1\right),$$

[4] $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \quad, \alpha > 0, \;\; \beta > 0.$

por el criterio M de Weierstrass[5] se concluye que

$$\varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x))$$

converge absoluta y uniformemente en $(0, h]$ a una única función $\varphi(x)$. Luego

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

Probemos que $\varphi(x)$ es solución de la ecuación integral (2.10) para $0 < x \leq h$.

En efecto, como $f(x, y)$ es continua sobre Ω y $\varphi_n(x) \underset{(0,h]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x, \varphi_n(x)) = f(x, \varphi(x)).$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = \varphi_0(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi_n(t))dt \\
&= \varphi_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \lim_{n\to\infty} (x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi_n(t))dt \\
&= \varphi_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, \varphi(t))dt.
\end{aligned}$$

O sea, la función $\varphi(x)$ es solución del problema de Cauchy descrito en (2.8) y (2.9).

3. Para concluir la demostración, mostremos que la solución $y(x)$ es única cuando h es "suficientemente pequeño". Sean $\dfrac{Lh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ y $y(x)$, $Y(x)$ dos soluciones del problema considerado. De la ecuación integral (2.10) tenemos:

$$|y(x) - Y(x)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y(t)) - f(t, Y(t))]dt \right|$$

$$|y(x) - Y(x)| \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y(t) - Y(t)|dt.$$

[5] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto X. Supongamos que $|f_n(x)| \leq M_n;\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en X si $\sum M_n$ converge.

Podemos suponer que la diferencia $|y(t) - Y(t)|$ admite un valor máximo $\theta > 0$ en un cierto punto $x = \zeta$ perteneciente a $(0, h]$. Haciendo $x = \zeta$ en la anterior desigualdad tenemos que

$$\theta \leq \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)}\theta h^\alpha,$$

esto es, $1 \leq \dfrac{Lh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, lo cual es una contradicción con el supuesto de que $\dfrac{Lh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$. De lo anterior concluimos que para h lo "suficientemente pequeño"la solución del problema de Cauchy es única.

$\square$

2.3.1. Resolución de EDF homogéneas y no homogéneas

Para finalizar el estudio del problema de Cauchy en el marco de las EDF resueltas respecto a la derivada, presentamos a manera de ejemplo, la resolución de una EDF homogénea y una no homogénea.

Ejemplo 1. Resolver el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ I^{1-\alpha} y(0+) = b \quad . \end{cases}$$

Solución. Observemos que en este caso $f(x, y) = \lambda y(x) \equiv \lambda y$, así que

$$I^\alpha D^\alpha y(x) = I^\alpha \lambda y(x).$$

Teniendo en cuenta la condición inicial y la relación existente entre los operadores D^α e I^α obtenemos:

$$y(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda(I^\alpha y)(x).$$

Ahora, consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\
y_1(x) &= y_0 + \lambda(I^\alpha y_0)(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n(x) &= y_0 + \lambda(I^\alpha y_{n-1})(x) \quad , n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Si $n=1$ entonces $y_1(x) = y_0 + \lambda\left(I^\alpha y_0\right)(x)$, de donde

$$(I^\alpha y_0)(x) = I^\alpha\left(\frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) = \frac{bx^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Luego,

$$y_1(x) = y_0 + \lambda(I^\alpha y_0)(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{bx^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Para $n=2$ se tiene que $y_2(x) = y_0 + \lambda(I^\alpha y_1)(x)$. Calculemos $(I^\alpha y_1)(x)$.

$$(I^\alpha y_1)(x) = (I^\alpha y_0)(x) + \lambda(I^{2\alpha} y_0)(x) = I^\alpha\left(\frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) + I^{2\alpha}\left(\frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) = \frac{bx^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{bx^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)}.$$

Por tanto

$$y_2(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{bx^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{bx^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)}.$$

En general,

$$y_n(x) = b\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j x^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} \qquad , n\in\mathbb{N}.$$

De acuerdo a la demostración del teorema 14, si $n\to\infty$, tenemos la siguiente representación para la solución:

$$y(x) = bx^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} = bx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha).$$

En particular, si $\alpha=1$ entonces

$$y(x) = b\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{\Gamma(j+1)} = be^{\lambda x},$$

obteniendo así la solución conocida del problema de Cauchy para EDO de primer orden.

Ejemplo 2. Construimos ahora la solución del problema de Cauchy para la EDF no homogénea

$$D^{\alpha}y(x) - \lambda y(x) = h(x), \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.13}$$

con la condición inicial

$$I^{1-\alpha}y(0+) \equiv \left.\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}y(x)\right|_{x=0+} = b.$$

Solución. De la ecuación (2.13) tenemos:

$$y(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda(I^{\alpha}y)(x) + (I^{\alpha}h)(x).$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$y_n(x) = y_0 + \lambda I^{\alpha}y_{n-1}(x) + I^{\alpha}h(x) \;\; ; \;\; y_0 = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

y definimos también el polinomio[6] simbólico P_n como $P_n := \sum_{j=0}^{n}(\lambda I^{\alpha})^j$. Consideraremos que $P_0 := id$ [7].

Recurrentemente,

$$y_n = P_{n-1}\left(y_0 + I^{\alpha}h\right) + (\lambda I^{\alpha})^n y_0 \;; \tag{2.14}$$

o sea,

$$y_n(x) = b\sum_{j=0}^{n}\frac{\lambda^j x^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} + \int_0^x \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j (x-t)^{j\alpha+\alpha-1}h(t)}{\Gamma(j\alpha+\alpha)}dt. \tag{2.15}$$

En efecto para $n = 1$, la ecuación (2.14) se cumple trivialmente. Supongamos ahora que (2.14) se verifica para $k = n$ y probemos que también se cumple para $k = n+1$.

Por hipótesis inductiva,

$$y_n = P_{n-1}\left(y_0 + I^{\alpha}h\right) + (\lambda I^{\alpha})^n y_0 \quad .$$

[6] $P_n y := \sum_{j=0}^{n}(\lambda I^{\alpha})^j y = y + \lambda I^{\alpha}y + \lambda^2 I^{2\alpha}y + ... + \lambda^n I^{n\alpha}y.$

[7] id representa el operador identidad: $id\varphi \equiv \varphi$

Luego,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_0 + P_{n-1}\,(y_0 + I^{\alpha}h) + (\lambda I^{\alpha})^{n+1} y_0 + I^{\alpha}h \\
&= id\,(y_0 + I^{\alpha}h) + \sum_{j=0}^{n} (\lambda I^{\alpha})^{j}\,(y_0 + I^{\alpha}h) + (\lambda I^{\alpha})^{n+1} y_0 \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} (\lambda I^{\alpha})^{j}\,(y_0 + I^{\alpha}h) + (\lambda I^{\alpha})^{n+1} y_0 \\
&= P_n\,(y_0 + I^{\alpha}h) + (\lambda I^{\alpha})^{n+1} y_0.
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción matemática concluimos que (2.14) se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a (2.15) podemos ver cuando $n \to \infty$, la solución al problema de Cauchy es:

$$y(x) = bx^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda (x-t)^{\alpha}] h(t) dt.$$

Capítulo 3

Problema de Cauchy para EDF resueltas respecto a la derivada (caso $\alpha > 1$)

En este capítulo continuamos el estudio del problema de Cauchy para EDF resueltas respecto a la derivada, considerando ahora órdenes superiores de diferenciación a los establecidos en el capítulo anterior. Posteriormente mostraremos mediante un ejemplo la aplicación del cálculo fraccional a la resolución de EDO de orden entero.

3.1. Planteamiento del problema de Cauchy para EDF

Supongamos que se debe hallar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial

$$D^{\alpha}y(x) \equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}y(x) = f(x,y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n = 2, 3.... \tag{3.1}$$

bajo las condiciones iniciales

$$I^{k-\alpha}y(+0) \equiv \left.\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}y(x)\right|_{x=0+} = b_k, \quad k = 1, 2, ..., n; \tag{3.2}$$

donde $f(x,y)$ es una función dada y $b_1, ..., b_n$ son constantes.

Representamos por R_n el siguiente conjunto:

$$R_n = \left\{ (x,y) \in \Omega : 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\}, \; a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

donde a, h y b_0 son ciertas constantes.

Teorema 15. *Sea $f(x,y)$ una función de valor real continua en Ω y que satisface respecto a la segunda variable la condición de Lipschitz, es decir*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \; ; \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega,$$

y la condición $\sup\limits_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)| = M < \infty$.
Entonces existe una única solución continua del problema de Cauchy (3.1)- (3.2) en el dominio R_n.

Demostración. Consideremos tres etapas.

1. Primero demostraremos que una función $y(x)$ es solución del problema de Cauchy (3.1)- (3.2) si y solo si $y(x)$ es solución de la ecuación integral [1]

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha - k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y) dt. \tag{3.3}$$

   Es decir, el problema descrito en (3.1) y (3.2) se reduce a (3.3):

   $\Rightarrow$) Si $y(x)$ satisface el problema de Cauchy entonces

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)). \tag{3.4}$$

   Integrando (3.4) tenemos

$$I^\alpha D^\alpha y(x) = I^\alpha f(x, y(x)).$$

   Teniendo en cuenta la relación entre los operadores I^α , D^α descrita en (1.14) y la condición (3.2) , obtenemos :

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + I^\alpha f(x, y(x)).$$

[1] $I^\alpha f(x,y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y) dt.$

Por lo tanto y satisface la ecuación integral (3.3).

$\Leftarrow$) Si y satisface la ecuación integral (3.3), entonces

$$D^\alpha y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} D^\alpha x^{\alpha-k} + D^\alpha I^\alpha f(x,y),$$

y tenemos que $D^\alpha y(x) = f(x,y)$ como consecuencia del teorema 11.

Ahora, las condiciones iniciales dadas en (3.2) se siguen al aplicar el operador $\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}$ a (3.3), para lo cual basta observar lo siguiente:

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} I^{k-\alpha} x^{\alpha-k} + D^{\alpha-k} I^\alpha f(x,y) = b_k + I^k f(x,y),$$

pero $I^k f(+0,y) = 0$. Por tanto $y(x)$ satisface el problema de Cauchy.

2. Consideremos la sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\ , \\ \varphi_1(x) & = & \varphi_0(x) + (I^\alpha f(x,\varphi_0))(x), \\ \ldots. & . & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x) & = & \varphi_0(x) + (I^\alpha f(x,\varphi_{m-1}))(x). \end{array}$$

Afirmamos que si $x \in (0,h]$ entonces $(x,\varphi_m(x)) \in R_n$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \left| x^{n-\alpha}\varphi_m(x) - \dfrac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| & = & \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + x^{n-\alpha}(I^\alpha f(x,\varphi_{m-1}))(x) \right| \\ & \leq & \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{M x^n}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \\ & = & \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \right|, \end{array}$$

donde $b_0 := M$. Así,

$$\left| x^{n-\alpha}\varphi_m(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k h^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Si $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{b_k h^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} < a$ entonces $(x,\varphi_m(x)) \in R_n$, para todo $x \in (0,h]$.

Veamos que $\{\varphi_m(x)\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente en $(0,h]$ a la solución de la ecuación integral (3.3).

Realizamos esta prueba en tres etapas:

a. Afirmamos que

$$|\varphi_m(x)-\varphi_{m-1}(x)| \le \frac{ML^{m-1}h^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}, \quad \forall m\in\mathbb{N}, \quad \forall x\in(0,h]. \tag{3.5}$$

Razonando inductivamente tenemos:

• Si $m=1$ entonces

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x |(x-t)^{\alpha-1}f(t,\varphi_0(t))|dt \le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt \le \frac{Mh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

• Supongamos que (3.5) se cumple para $m=j$, es decir,

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)| \le \frac{ML^{j-1}h^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}\ , \ \forall x\in(0,h],$$

y mostremos que (3.5) se cumple para $m=j+1$. Como f satisface la condición de Lipschitz respecto a y sobre $R_n\subset\Omega$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi_{j+1}(x)-\varphi_j(x)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t,\varphi_j(t))-f(t,\varphi_{j-1}(t))|dt \\
&\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|\varphi_j(t)-\varphi_{j-1}(t)|dt \\
&\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\frac{ML^{j-1}}{\Gamma(j\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{j\alpha}dt \le \frac{L^jMh^{(j+1)\alpha}}{\Gamma((j+1)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

En virtud del principio de inducción matemática concluimos que (3.5) es válida para todo $m\in\mathbb{N}$.

b. Teniendo en cuenta lo expuesto en la parte **a.** tenemos:

$$|\varphi_m(x)-\varphi_{m-1}(x)| \le \frac{ML^{m-1}h^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}, \quad \forall m\in\mathbb{N}\,, \quad \forall x\in(0,h].$$

Como
$$\frac{M}{L}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(Lh^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha+1)}=\frac{M}{L}\left(E_{\alpha,1}(Lh^{\alpha})-1\right),$$
por el criterio M de Weierstrass se concluye que
$$\varphi_0+\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x))$$
converge absoluta y uniformemente en $(0,h]$ a una única función $\varphi(x)$; Luego,
$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x))=\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x).$$

c. Probemos que $\varphi(x)$ es solución de la ecuación integral (3.3) para $0<x\leq h$. En efecto, como $f(x,y)$ es continua sobre Ω y $\varphi_m(x) \underset{(0,h]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, entonces:
$$\lim_{m\to\infty} f(x,\varphi_m(x))=f(x,\varphi(x)).$$
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{m\to\infty}\varphi_{m+1}(x)=\varphi_0(x)+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,\varphi_m(t))dt\\ &= \varphi_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\lim_{m\to\infty}(x-t)^{\alpha-1}f(t,\varphi_m(t))dt\\ &= \varphi_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,\varphi(t))dt.\end{aligned}$$
O sea, la función $\varphi(x)$ es solución del problema de Cauchy descrito en (3.1) y (3.2).

3. Para concluir la demostración, establezcamos que la solución $y(x)$ es única cuando h es "suficientemente pequeño". Sean $\dfrac{Lh^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<1$ y $y(x)$, $Y(x)$ dos soluciones del problema considerado. De la ecuación integral (3.3) tenemos:
$$|y(x)-Y(x)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}[f(t,y(t))-f(t,Y(t))]dt\right|$$
$$|y(x)-Y(x)|\leq\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}|y(t)-Y(t)|dt.$$

Podemos suponer que la diferencia $|y(t) - Y(t)|$ admite un valor máximo θ en un cierto punto $x = \zeta$ perteneciente a $(0, h]$. Haciendo $x = \zeta$ en la anterior desigualdad tenemos que

$$\theta \leq \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)}\theta h^{\alpha},$$

esto es, $1 \leq \dfrac{Lh^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, lo cual es una contradicción con el supuesto de que $\dfrac{Lh^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$. De lo anterior concluimos que para h lo "suficientemente pequeño" la solución del problema de Cauchy es única.

$\square$

3.2. Resolución de EDO usando derivadas fraccionarias

La teoría de la integro-diferenciación fraccionaria puede emplearse en algunos casos como una herramienta útil para solucionar cierto tipo de EDO de orden entero. En el apéndice B se muestra como el operador D^{α} es empleado para resolver EDO de órdenes altos.
En esta sección presentaremos la solución de una EDO usando algunos elementos del cálculo fraccional.

3.2.1. Fórmula de Leibniz para derivadas

De acuerdo a lo estudiado en el curso de cálculo diferencial sabemos que la derivada n-ésima del producto de dos funciones reales f, g n veces diferenciables, puede calcularse de la siguiente forma:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

llamada ***fórmula de Leibniz*** para la derivada n-ésima del producto de las funciones f y g. Observando la igualdad anterior, resulta natural pensar en una extensión de ésta a órdenes no enteros de diferenciación. El siguiente resultado muestra tal generalización. Su respectiva demostración puede consultarse en Samko, Kilvas, Marichev [13].

Teorema 16. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$. Si $f, g \in C^\infty([a,b])$ entonces*

$$D^\alpha(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^{\alpha-k} f(x)) g^{(k)}(x) \,, \quad x \in (a,b)$$

donde $\binom{\alpha}{k}$ es el coeficiente binomial definido mediante la fórmula

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Abordamos a continuación el principal objetivo de esta sección, el cual es la solución de una EDO de orden entero mediante la integro-diferenciación fraccionaria.

Ejemplo. Resolver la siguiente EDO:

$$(x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0 \,; \;\; x \in [0,1] \tag{3.6}$$

donde $a < 1$, $b < 1$, $c < 2$.

Solución. Determinemos una de las soluciones de (3.6) en forma de una derivada fraccionaria $y(x) = D^\alpha z(x)$, donde el parámetro α será definido posteriormente. Usando la fórmula de Leibniz para derivadas fraccionarias tenemos:

$\star$ $D^{\alpha+2}((x-x^2)z(x)) = (x-x^2)D^{\alpha+2}z(x) - 2(\alpha+2)(1-2x)D^{\alpha+1}z(x) - (\alpha+1)(\alpha+2)D^\alpha z(x)$,

$\star$ $D^{\alpha+1}((c-(a+b+1)x)z(x)) = (c-(a+b+1)x)D^{\alpha+1}z(x) - (\alpha+1)(a+b+1)D^\alpha z(x)$,

$\star$ $D^\alpha(-abz(x)) = -abD^\alpha z(x)$.

Por lo anterior, la ecuación (3.6) puede escribirse en términos de la derivada fraccionaria de la siguiente manera:

$$D^{\alpha+2}[(x-x^2)z(x)] + D^{\alpha+1}[(c-(a+b+1)x - 2(\alpha+2)x + (\alpha+2))z(x)]$$

$$+ D^{\alpha}[(-ab + (a+b+1)(\alpha+1) - (\alpha+1)(\alpha+2))z(x)] = 0. \tag{3.7}$$

Encontremos la solución de la ecuación (3.7) en el espacio de funciones $z(x)$ integrables sobre $[0,1]$ tal que $z(0) = z'(0) = 0$. Las condiciones sobre $z(x)$ son necesarias para establecer las relaciones $D^{\alpha}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}D^{\alpha}$ y $D^{\alpha}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}D^{\alpha}$ las cuales son validas para $\alpha < 0$.

Claramente la ecuación (3.7) puede escribirse en la forma:

$$D^{\alpha}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(x-x^2)z(x) + [c-(a+b+1)x + 2(\alpha+2)x - (\alpha+2)]z(x)\right]\right. \tag{3.8}$$

$$\left. +[-ab + (a+b+1)(\alpha+1) - (\alpha+1)(\alpha+2)]z(x)\right\} = 0.$$

Definimos el parámetro α como una de las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$-ab + (a+b+1)(\alpha+1) - (\alpha+1)(\alpha+2) = 0. \tag{3.9}$$

Entonces de (3.8) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dx}(x-x^2) = -z[c-(a+b+1)x - (\alpha+2)(1-2x)]\ ,$$

donde su solución se determina fácilmente usando el método de separación de variables, a saber:

$$z(x) = (x-x^2)^{\alpha-1}\exp\left\{-\int \frac{-c-(a+b+1)x}{x-x^2}dx\right\}\ ;$$

esto es

$$z(x) = x^{\alpha+1-c}(1-x)^{\alpha+c-a-b}.$$

Como la solución de (3.6) tiene la forma $y(x) = D^{\alpha}z(x)$, donde α es el parámetro definido en (3.9), si consideramos $\alpha = a-1$ entonces

$$z(x) = x^{a-c}(1-x)^{c-b-1}.$$

Por tanto,

$$y(x) = D^{a-1}z(x) = I^{a-1}x^{a-c}(1-x)^{c-b-1} = \frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)}x^{1-c}F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x).$$

Apéndice A

Existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy para las EDF

El propósito de este complemento es mostrar, que usando el teorema del punto fijo (Teorema 12), puede obtenerse el teorema 15 de una manera más sencilla que la presentada en el capitulo 3 de este trabajo. (ver página 42).

A.1. Problema de Cauchy para EDF

Presentamos a continuación la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución del problema Cauchy para EDF, resueltas respecto a la derivada. Usaremos como herramienta principal el teorema del punto fijo de Banach (ver sección 2.2).

Planteamiento del problema

Supongamos que se debe hallar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial

$$D^{\alpha}y(x) \equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}y(x) = f(x,y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n = 1, 2, ... \ ; \tag{A.1}$$

bajo las condiciones iniciales:

$$I^{k-\alpha}y(+0) \equiv \frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}y(x)\bigg|_{x=0+} = b_k, \quad k = 1, 2, ..., n \ ; \tag{A.2}$$

donde $f(x,y)$ es una función dada y $b_1, ..., b_n$ son constantes.

Representamos por R_n el siguiente conjunto:

$$R_n = \left\{ (x,y) \in \Omega : 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\},\ a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

donde a, h y b_0 son ciertas constantes.

Teorema 17. *Sea $f(x,y)$ una función de valor real continua en Ω y que satisface respecto a y la condición de Lipschitz,es decir*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \ ; \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega,$$

y la condición $\sup_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)| = M < \infty$.
Entonces existe una única solución continua del problema de Cauchy descrito en (A.1), (A.2) en el dominio R_n para h "suficientemente pequeño".

Demostración. Consideremos el siguiente espacio lineal:

$$C^* := \left\{ g \in C((0,h]) : \left| x^{n-\alpha} g(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\}.$$

El espacio C^* con la métrica estándar es completo, ya que representa un subespacio cerrado del espacio completo de todas las funciones continuas sobre $(0,h]$. La afirmación de que C^* es cerrado se tiene del hecho de que cualquier sucesión convergente en $(0,h]$ converge uniformemente a una función continua perteneciente a C^*.

Definimos la aplicación $T : C^* \to C((0,h])$ mediante la fórmula :

$$T\varphi(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,\varphi(t))dt.$$

Esta aplicación transforma el espacio C^* en sí mismo y es contracción. En efecto, si $\varphi \in C^*$ entonces

$$\left| x^{n-\alpha} T\varphi(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \ = \ \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + x^{n-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,\varphi(t))dt. \right|$$

$$
\begin{aligned}
\left| x^{n-\alpha} T\varphi(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{M x^n}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k h^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} < a,
\end{aligned}
$$

por consiguiente, $T(C^*) \subset C^*$. Probemos ahora que T es contracción sobre C^*. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\max_{x\in(0,h]} |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| &\leq \max_{x\in(0,h]} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))| dt \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \max_{x\in(0,h]} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt \right| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \max_{x\in(0,h]} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \max_{t\in(0,h]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt \right| \\
&= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \max_{t\in(0,h]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \max_{x\in(0,h]} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \\
&\leq \frac{h^\alpha L}{\Gamma(\alpha+1)} \max_{x\in(0,h]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|
\end{aligned}
$$

Si consideremos como constante de contracción a $\lambda = \dfrac{Lh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ entonces la aplicación T es contracción y en virtud del teorema del punto fijo de Banach se deduce la existencia de una única función $y \in C^*$ tal que $Ty = y$, esto es:

$$
y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,\varphi(t)) dt.
$$

es solución del problema (A.1)-(A.2).

$\square$

Apéndice B

Solución de un tipo de EDO de “orden alto” usando derivadas fraccionarias [1]

A manera de complemento presentamos brevemente la resolución de una EDO, usando las técnicas de la integro-diferenciación fraccionaria. Los detalles (que se escapan a los propósitos del presente trabajo) pueden consultarse en Samko, Kilvas, Marichev [8, pág.852].

Resolver la EDO:

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k x)\frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad n > 1. \tag{B.1}$$

Solución. Usando los operadores de integración y diferenciación fraccionaria, se construye una de las soluciones de (B.1) en la forma de una integral $(n-1)$ dimensional. Para esto primero se introducen los polinomios:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad , \quad \phi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_n \prod_{k=0}^{n}(x - \lambda_k), \tag{B.2}$$

[1] La expresión “orden alto” no se encuentra en la bibliografía sobre EDO, y se ha introducido en este trabajo solamente para resaltar que el orden n es “mucho mayor” que 1.

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son las raíces de $\phi(x)$, tales que $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \neq k$, $j, k = 1, ..., n$. Haciendo la sustitución

$$y(x) = \exp(\lambda_1 x) Y(x)\,, \quad \lambda_1 \neq 0 \tag{B.3}$$

y usando la identidad[2]

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\exp(\lambda_1 x) Y(x)\right] \equiv \exp(\lambda_1 x)\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)^m Y(x)\ ,$$

la ecuación (B.1) toma la forma:

$$\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right) Y(x) + x\phi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right) Y(x) = 0. \tag{B.4}$$

Se buscará la solución de esta ecuación como una derivada de orden α: sea $Y(x) = D^{\alpha} u_1(x)$, donde el parámetro α se determina posteriormente y la función $u_1(x)$ es integrable en algún intervalo $(0, a)$ y satisface las condiciones:

$$u_1(0) = u_1'(0) = ... = u_1^{\alpha-1}(0) = 0. \tag{B.5}$$

Entonces (B.4) se reduce a la siguiente ecuación:

$$D^{\alpha+1}\left\{\frac{d^-1}{dx^-1}\left[\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right) - (\alpha+1)\frac{d^-1}{dx^-1}\phi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right] + x\frac{d^-1}{dx^-1}\phi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right\} u_1(x) = 0. \tag{B.6}$$

Se introducen los polinomios

$$\phi_1(x) = x^{-1}\phi(\lambda_1 + x);\ \ \varphi_1(x) = x^{-1}[\varphi(\lambda_1 + x) - (\alpha+1)\phi_1(x)]. \tag{B.7}$$

Como $\phi(\lambda_1) = 0$ entonces $\phi_1(x)$ tiene orden $n-1$. Se escoge α de la igualdad:

$$\alpha + 1 = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\phi_1(0)} = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\phi_1'(\lambda_1)} = \alpha_1, \tag{B.8}$$

y se tiene que $x\varphi_1(x)$ se anula para $x = 0$. Por tanto $\varphi_1(x)$ es un polinomio de orden $n-1$. Se considera $\alpha_1 < 0$. Teniendo en cuenta que (B.6) es una ecuación integral de Abel homogénea (ya que $D^{\alpha+1} = I^{\alpha_1}$), de ella se deduce, usando la notación (B.7), que

$$\varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right) u_1(x) + x\phi_1\left(\frac{d}{dx}\right) u_1(x) = 0. \tag{B.9}$$

[2] $\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \lambda_1^{(m-k)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{(k)}$

Obsérvese que (B.9) es una ecuación de orden $n-1$, esto es, se ha reducido el orden en 1. Continuando por analogía este proceso, se tiene la siguiente representación para una de las soluciones de (B.1):

$$y(x) = b_n^{-\alpha_n} e^{\lambda_1 x} \times \frac{d^{\alpha_1 - 1}}{dx^{\alpha_1 - 1}} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \times \frac{d^{\alpha_2 - 1}}{dx^{\alpha_2 - 1}} e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \times \cdots \times \frac{d^{\alpha_n - 1}}{dx^{\alpha_n - 1}} e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} x^{-\alpha_n}. \quad \text{(B.10)}$$

El caso especial de (B.1) para $n = 2,\ a_2 = b_0 = 0,\ b_2 = -b_1 = 1$ se conoce como ecuación hipergeométrica degenerativa de Kummer

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0. \quad \text{(B.11)}$$

Para esta ecuación

$$\varphi(x) = cx - a, \qquad \phi(x) = x^2 - x,$$
$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0, \quad \alpha_1 = c - a, \quad \alpha_2 = a.$$

La solución dada en (B.10) para (B.11) tiene la forma:

$$y(x) = e^x \frac{d^{c-a-1}}{dx^{c-a-1}} e^{-x} x^{-a} = e^x \int_0^x \frac{(x-a)^{a-c}}{\Gamma(1+a-c)} e^{-t} t^{-a} dt.$$

Bibliografía

[1] APÓSTOL, T, *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, Colombia S.A. 1998.

[2] A. KRÁSNOV, M. KISELIÓV, G. MAKARENKO *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Editorial Mir, Moscú, 1979.

[3] BAUTISTA A.I., PALECHOR L.Y. *Fórmula Local de Taylor para funciones de la clase* $AC([a,b])$*, usando derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.* Trabajo de Grado, Universidad del Cauca, 2008.

[4] BUCHELLI J., SOTELO J.G. *Comparación de las derivadas de orden no entero según Louville y Marshout.* Trabajo de Grado, Universidad del Cauca, 2006.

[5] BURENKÓV, V.I. *Espacios Funcionales. Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1987.

[6] BURENKÓV, V.I. *Espacios Funcionales. Desigualdades Integrales Fundamentales, relacionadas con los Espacios Lp.* Editorial U.D.N. Moscú, 1989.

[7] DEMIDÓVICH, V.P. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Nauka, Moscú,1990.

[8] KOLMOGÓROV A.N., FOMÍN,S.V. *Elementos de la teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[9] KUDRIÁVTSEV, L.D. *Curso de Análisis Matemático. Tomo I y II.* Editorial Mir, Moscú, 1983.

[10] NATANSÓN, I.P. *Theory of functions of a real variable. Volumen I-II.* Editorial Frederick Ungar Publishing CO., New York, Third Printing, 1964.

[11] PRÚDNIKOV A.P. BRÍCHKOV Y.A. MARICHÉV O.I. *Integrales y series. Funciones Especiales.* Editorial Nauka, Moscú, 1983.

[12] RUDIN, W. *Principios de Análisis Matemático.* 3^a Edición. Editorial McGraw Hill, México, 1980.

[13] SAMKÓ, S,G, KILVAS, A.A. MARICHÉV, O.I. *Fractional integrals and derivatives-theory and applications.* Editorial Gordon and Breach Science Publishers S.A. 1993.

[14] ULYÁNOV, P.L. DYÁCHENKO M. *Análisis Real. Medida e Integración.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, España S.A. 2000.

[15] ZILL, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Editorial Internacional Thomson S.A. Sexta Edición, 1997.