UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS,DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

SOBRE UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADA FRACCIONARIA EN ESPACIOS DE BANACH

Cristhian David Montoya Zambrano

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Chile para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Especialidad Matemáticas.

Profesor Guía: Humberto Prado Castillo.

Santiago, Chile.

Septiembre 2012.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS,DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y

CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Título de tesis: Sobre una clase de ecuaciones en derivada fraccionaria en espacios de Banach
Autor: Cristhian David Montoya Zambrano.

Jurado Interno:

Przemer Gorka
Profesor invitado
Universidad de Varsovia

Jurado Interno:

Enrique Reyes
Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.

Profesor Guía :

Humberto Prado Castillo
Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal desarrollar los detalles técnico de los artículos de El-Sayed y Mohamed Herzallah [7, 9] donde los autores han realizado un estudio cualitativo de una ecuación de evolución lineal fraccionaria sobre un espacio de Banach, con derivada de orden fraccionario $\beta \in (1,2)$. En [7, 9] se considera una cierta clase de ecuación no homogénea y se investigan propiedades de regularidad de las soluciones $u_\beta(t)$, además se analiza el límite de las soluciones cuando $\beta \to 1^+$, en este caso $u_1(t)$ es solución del problema no homogéneo de primer orden, también se demuestra que si $\beta \to 2^-$ entonces $u_2(t)$ es solución del problema no homogéneo de segundo orden.
El objetivo principal es estudiar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación en derivada fraccionaria

$$D^\beta u(t) = \eta Au(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t), \tag{1}$$

$u(0) = x;\ \ u'(0) = y,\ \ \beta \in (1,2)$, $\eta > 0$, donde D^β denota a la derivada de orden fraccionario, f pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,1}(I, X_A)$, y $k(t)$ es un núcleo que satisface ciertas condiciones de regularidad y A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 uniformemente acotado. Primero introduciremos las propiedades y definiciones fundamentales de la derivada fraccionaria, la que presentaremos como un operador integro-diferencial. Adicionalmente se estudian algunos aspectos clásicos de la teoría de semigrupos incluyendo teoremas sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales sobre espacios de Banach (ver [17],[5]). Posteriormente se analiza la continuidad de la solución como función de β (ver [7]) aplicando los métodos de la transformada de Laplace- Stieltjes y el teorema de Representación de Riesz- Stieltjes [1].

El trabajo esta dividido en tres capítulos, en el capítulo 1 se estudian las principales propiedades de la Integral de Bochner la cual es una extensión de la integral de Lebesgue a funciones $f : I \to X$, donde I es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y X un espacio de Banach [22]. También se introduce la diferenciación fraccionaria. Así mismo se estudia la relación entre el operador de integración y diferenciación de orden fraccionaria, a saber:

$$D^\alpha J^\alpha f = f,$$

para cualquier $f \in L^1(I; X)$, mientras que $J^\alpha D^\alpha f(t) \neq f(t)$ si $f \in L^1(I; X)$. Sin embargo, se muestra un resultado para $J^\alpha D^\alpha f(t)$ a través de los espacios de Lebesgue y los espacios de Sobolev $W^{m,1}(I; X)$.

El capitulo 2 tiene como punto de partida aspectos básicos de la teoría de semigrupos uniformemente continuos y fuertemente continuos los cuales son necesarios para comprender el planteamiento de la ecuación (1). Tales aspectos se refieren a propiedades principales de los semigrupos, generación de semigrupos y el celebrado Teorema de Hille-Yosida (ver [17]).

Posteriormente, se analiza una ecuación integral de la forma

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds \tag{2}$$

y se realiza una conexión entre las ecuaciones (1), (2) a través de familias resolventes $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, ver [11], las cuales corresponden al operador solución de la ecuación (1). Finalmente, se demuestra la existencia de soluciones de (1), y se obtiene que estas se pueden representar como:

$$u_\beta = e^t S_\beta(t)x + (e^t S_\beta * (-x + y - ty + \phi_\beta(t)f(0) + \phi_\beta * (f' - f)))(t),$$

donde $\phi_\beta(t) := \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, $\quad t > 0, \beta \geq 0$. Más aún para cada β la solución u_β, de la ecuación (1), es única.

El tercer capítulo constituye la etapa final y consiste en analizar la continuidad respecto a β de la solución u_β cuando $\beta \to 1^+$ y compararla mediante paso al límite con el caso en que $\beta = 1$ en la ecuación (1), es decir:

$$\lim_{\beta \to 1+} u_\beta(t) = u_1(t).$$

Para abordar tal objetivo, se aplican los métodos de la transformada de Laplace- Stieltjes $\int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t)$, la cual es una generalización de la Transformada de Laplace. Adicionalmente, se aplica el teorema de Representación de Riesz- Stieltjes y un teorema de aproximación que permite conocer el límite de una sucesión de funciones (f_n) si se conoce el límite de sus transformadas $(\widehat{f_n})$ y recíprocamente.

Para analizar el límite $\lim_{\beta \to 2^-} u_\beta(t)$ se aplican métodos similares al caso $\beta \to 1^+$, pero en vez de suponer que A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0, se imponen condiciones que aseguren que A es el generador de una familia coseno, lo que corresponde al operador solución del problema de segundo orden. Este caso no se ha considerado en esta tesis ya que queda fuera de los alcances y objetivos de este trabajo.

Capítulo 1

Integración y diferenciación fraccionaria

En este capítulo presentamos ciertas definiciones y proposiciones necesarias para nuestro propósito.Fundamentos de teoría de la medida e integral de Lebesgue son considerados, además de las nociones básicas de los espacios de Sobolev. También estableceremos las definiciones y algunos resultados de la derivada e integral fraccionaria bajo los diferentes enfoques realizados por según Riemann-Liouville y Caputo.
Como complemento, el lector encontrará mayor información en [4],[19],[15].

1.1. Nociones basicas

Algunas notaciones

En el transcurso de este trabajo se denota por $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ al conjunto de los numeros naturales, reales y números complejos respectivamente, y $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mathbb{R}_0 := [0, +\infty), I = [0, \tau]$. Si $\alpha > 0$, $\lfloor \alpha \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a α y $\lceil \alpha \rceil$ denota el menor entero mayor o igual a α.
Se denota por X, Y espacios de Banach con normas $\|.\|_X, \|.\|_Y$; Por $\mathcal{B}(X, Y)$ se entiende el espacio de todos los operadores lineales acotados de X a Y; $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$. Si A

es un operador lineal en X entonces $D(A), R(A), N(A)$ denota dominio, rango y espacio nulo de A respectivamente, mientras que $\sigma(A)$ *y* $\rho(A)$ corresponden al espectro y conjunto resolvente de A. $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ para el operador resolvente de A.

1.1.1. Integral de Bochner

Frecuentemente en la literatura se usan integrales de funciones que toman valores en espacios de Banach, es decir, integrales del tipo $\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu((t)$, donde $f : \mathbb{R} \to X$ es una función con valores en un espacio de Banach X y μ una medida. Tales integrales pueden ser definidas de distintas formas, en este trabajo consideraremos el enfoque de la definición de Bochner. Esta definición puede ser considerada como una generalización de la definición de integral de Lebesgue de funciones de valor real.
Asumimos que el lector esta familiarizado con los aspectos básicos sobre medida e integración de funciones de valor escalar.

Definición 1. *Sea* (Ω, M, μ) *un espacio medible con* μ *-*σ *finita. Una función* $f : \Omega \to X$, *donde* X *es un espacio de Banach , es denominada simple si*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(t) \qquad c_k \in X; k = 1, ..., n$$

donde los conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ *son medibles, sus medidas finitas y* $E_i \cap E_j =$ *para* $i \neq j$. *Es claro que*

$$||f(t)|| = \sum_{k=1}^{n} ||c_k|| \chi_{E_k}(t)$$

es una función simple de valor real sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2. *Una función* $f : \Omega \to X$ *es llamada fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples* $(f_n)_n^\infty$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(t) - f(t)|| = 0. \qquad (1.1)$$

Observacion.
Si f es fuertemente medible entonces

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(t)|| = ||f(t)||$$

y, $||f|| : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible, como limite de la convergencia de una sucesón de funciones simples.

Definición 3. *La integral de Bochner de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sobre el espacio Ω es denotada por $\int_\Omega f(t)d\mu(t)$ y definida, para una función simple $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(t)$ por*

$$\int_\Omega f(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k). \tag{1.2}$$

Definición 4. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable sobre Ω si esta es fuertemente medible (f_n simples) y $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||f(t) - f_n(t)|| = 0$.*
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable, entonces la Integral de Bochner de f sobre Ω es

$$\int_\Omega f(t)d\mu(t) := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(t)d\mu(t) \tag{1.3}$$

Observacion.
El lector puede consultar ([22]), donde se verifica la existencia del limite definido en (1.3) y su independencia de la escogencia de la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.
El conjunto de todas las funciones Bochner integrales es un espacio lineal y la integral de Bochner es una aplicación lineal. Además, cuando $X = \mathbb{C}$, las definiciones de integral de Bochner e integral de Lebesgue coinciden.
Una de las caracterizaciones de la clase de funciones Bochner integrables se enuncia a continuación.

Teorema 1. *(Bochner) Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable si y sólo si f es fuertemente medible y $||f||$ es integrable sobre Ω con respecto a la medida μ.*

Demostración

(i) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples que satisfacen las condiciones establecidas en (1.1) y (1.3). Entonces,

$$\int_\Omega ||f_n(t)||d\mu(t) < \infty.$$

Ahora, puesto que

$$\int_\Omega ||f(t) - f_n(t)|| \to 0,$$

esta integral es acotada y usando la desigualdad $||f_n(t)|| \leq ||f(t) - f_n(t)|| + ||f_n(t)||$ se concluye que

$$\int_\Omega ||f(t)|| d\mu(t) < \infty.$$

(ii) Sea f una función fuertemente medible tal que $||f|| \in L^1(\Omega, d\mu)$. Para cualquier sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^\infty$ que satisfacen la ecuación (1.1), construimos una sucesión auxiliar $(g_n)_{n=1}^\infty$ definida por

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{si} \quad ||f(t)|| \leq ||f(t)||(1 + n^{-1}), \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Claramente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||f(t) - g_n(t)|| = 0.$$

Más aún, $||g_n(t)|| \leq ||f(t)||(1 + n^{-1}) \leq 2||f(t)||$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión $(||f(.) - g_n(.)||)_{n=1}^\infty$ admite una cota superior integrable $3||f(.)||$ y en virtud del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||f(t) - g_n(t)|| = 0,$$

es decir, la función f es Bochner integrable sobre Ω.

Ilustremos ahora el comportamiento de la integral de Bochner bajo operadores lineales. El siguiente resultado es una simple consecuencia de la definición de la integral de Bochner, y será usado frecuentemente en este trabajo.

Proposición 1. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal acotado entre espacios de Banach X e Y y sea $f : \Omega \to X$. Entonces $Tf : t \to T(f(t))$ es Bochner integrable y*

$$T \int_\Omega f(t) d\mu(t) = \int_\Omega T(f(t)) d\mu(t).$$

Nosotros usaremos una versión de la proposición anterior para un operador lineal cerrado A sobre X.

Proposición 2. *Sea $A \in \mathcal{B}(X)$. Sea $f : \Omega \to X$ Bochner integrable. Suponga que $f(t) \in D(A)$ para todo $t \in \Omega$ y $Af : \Omega \to X$ es Bochner integrable.*

Entonces $\int_\Omega f(t)d\mu(t) \in D(A)$ *y*

$$A\int_\Omega f(t)d\mu(t) = \int_\Omega A(f(t))d\mu(t).$$

Demostración Consideremos $X \times X$ como un espacio de Banach en la norma $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$. El gráfico $G(A)$ de A es un subespacio cerrado de $X \times X$. Definimos la aplicación $g : \Omega \to G(A) \subset X \times X$ por $g(t) := (f(t), Af(t))$. Observar que g es fuermentente medible y

$$\int_\Omega ||g(t)||d\mu(t) = \int_\Omega ||f(t)||d\mu(t) + \int_\Omega ||Af(t)||d\mu(t) < \infty.$$

En virtud del teorema de Bochner, g es Bochner integrable, más aún, $\int_\Omega g(t)d\mu(t)$. Por otra parte, considerando las dos proyecciones de $X \times X$ sobre X y usando la proposición anterior se tiene

$$\int_\Omega g(t)d\mu(t) = \Big(\int_\Omega f(t)d\mu(t), \int_\Omega Af(t)d\mu(t)\Big)$$

lo cual concluye la demostración.

Definición 5. *Sea* $J = (a, b)$*, donde* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *y* $1 \leq p < \infty$*. Entonces,* $L^p(J; X)$ *denota el espacio de todas (clases de equivalencia) las funciones medibles* $f : J \to X$ *tales que* $\|f(t)\|_X^p$ *es integrable para* $t \in J$*.*
$L^p(J; X)$ *es un espacio de Banach con norma*

$$\|f\|_{L^p(J;X)} := \left(\int_J \|f(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ *el espacio* $L^\infty(J; X)$ *consiste de todas las funciones medibles tales que*

$$\|f\|_{L^\infty(J;X)} := ess\sup_{t\subset J}\|f(t)\|_X$$

es finita.

Las siguientes propiedades son conocídas y se siguen directamente de su contraparte correspondiente para el caso $X = \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Sea $J = (a, b)$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y $1 < p < \infty$.*

(i) Si $f \in L^p(J; X)$ y $g \in L^{p'}(J; X)$ donde $p' = p/(p-1)$, entonces

$$\int_J ||f(t)g(t)||_X dt \leq ||f||_p ||g||_{p'} \qquad \textit{Desigualdad de Hölder.}$$

(ii) Si X es un espacio de Banach arbitrario, y $1 \leq p \leq r \leq \infty$, entonces $L^r(\Omega, \mu, X) \subset L^p(\Omega, \mu, X)$ con inyección continuo.

(iii) Si, adicionalmente, Ω es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, μ la medida de Lebesgue sobre Ω y $p \in [1, \infty]$, entonces $C(\Omega; X) \subset L^p(\Omega, \mu, X)$, con inyección continuo.

Definición 6. *(a) El **espacio de Lipschitz** $Lip([0, \infty); X)$ consiste de aquellas funciones tales que*

$$\|F\|_{Lip} := \sup_{t \in I} \|F(t)\|_X + \sup_{t,s \geq 0, s \neq t} \frac{\|F(t) - F(s)\|}{|t - s|} < \infty.$$

*(b) **El espacio de Hölder** C^γ, $0 < \gamma < 1$ se define por:*

$$C^\gamma(I; X) := \left\{ f \in C(I; X) : \sup_{s,t \in I, s \neq t} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{|t - s|^\gamma} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\|_{C^\gamma} := \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X + \sup_{s,t \in I} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t - s|^\gamma}.$$

Definición 7. *Para $k, h \in L^1(\mathbb{R})$, argumentos basados con el Teorema de Fubini (ver [22]) muestran que la **convolución***

$$(k * h)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} k(t - s)h(s)ds$$

existe y además $k * f \in L^1(\mathbb{R})$. Más aún, la convolución es conmutativa y asociativa.

Definición 8. *Si $k : I \to \mathbb{C}$ y $h : I \to X$ son medibles, definimos la **convolución** por*

$$(k * h)(t) := \int_0^\tau k(t - s)h(s)ds \tag{1.4}$$

y existe (como una Integral de Bochner).

Proposición 3. *Sean $k, h \in L(I)$ y $f \in L(I; X)$. Entonces*

a) $(k * f)(t)$ *existe para casi todo* $t \in I$ *y* $k * f \in L(I; X)$.

b) $h * (k * f) = (h * k) * f$.

Proposición 4. *Si $k \in L^1(J, \mathbb{R})$, $f \in L^p(J, X)$ para algún $p \in [1, +\infty)$, entonces $k * f \in L^p(J, X)$ y*

$$\|k * f\|_{L^p(I;X)} \leq \|k\|_{L^1(I)} \|f\|_{L^p(I;X)} \qquad \textit{\textbf{Desigualdad de Young}}.$$

Definimos a continuación el concepto de convolución para funciones de valor vectorial y su relación con operadores lineales en espacios de Banach.

Recordemos que $\mathcal{B}(X)$ denota el espacio de operadores lineales acotados sobre X, siendo X un espacio de Banach. Una función $T : \mathbb{R}_0 \to \mathcal{B}(X)$ es fuertemente continua si $t \to T(t)x$ es continua para cada $x \in X$.

Por el teorema de Banach- Steinhaus, una función fuertemente continua T es localmente acotado. Notar además que $||T||$ es medible.

Anotamos también que los resultados de convolución para funciones fuertemente continuas $T : \mathbb{R}_0 \to \mathcal{B}(X)$ también son validos para $T : (0, \infty) \to \mathcal{B}(X)$ si T es fuertemente continua sobre $(0, \infty)$ y acotada sobre $(0, 1)$. Adicionalmente, resultados similares se tienen para intervalos compactos $[0, \tau]$.Anotamos

$$L^1_{loc}([0, \infty); X) := \{f : [0, \infty) \to X : f \, \textit{es Bochner integrable sobre } I\}$$

La prueba de las siguientes proposiciones puede ser consultada en ([22]).

Proposición 5. *Sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_0, X)$ y $T : \mathbb{R}_0 \to \mathcal{B}(X)$ fuertemente continuo. Entonces la convolución*

$$(T * f)(t) := \int_0^t T(t - s) f(s) ds$$

existe (como una integral de Bochner) y define una función continua $T * f : \mathbb{R}_0 \to X$.

Proposición 6. *Sea $T : \mathbb{R}_0 \to \mathcal{B}(X)$ fuertemente continua y acotada, $x \in X$, $f' \in L_{loc}(\mathbb{R}_0, X)$, $f(t) = x + \int_0^t f'(s) ds \quad (t \geq 0)$.*
Entonces $T * f \in C^1(\mathbb{R}_0, X)$ y

$$(T * f)'(t) = (T * f')(t) + T(t)x.$$

Proposición 7. *Sea $T : [0,\tau] \to \mathcal{B}(X)$ continua de Lipschitz con $T(0) = 0$, y sea $f \in L([0,\tau], X)$. Entonces $T * f \in C^1([0,\tau], X)$.*

1.1.2. Existencia de la Transformada de Laplace

Sea X un espacio de Banach complejo. Esta sección es concerniente a la existencia de la Integral de Laplace

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt := \lim_{\tau\to+\infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)dt,$$

para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que $\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)dt$ existe como una integral de Bochner, y si $\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$ existe como una integral de Bochner entonces esta bien definida la Integral de Laplace, por el teorema de convergencia dominada.

Definición 9. *Se define* ***la abscisa de convergencia*** *de $\widehat{f}$, denotado por $abs(f)$ por:*

$$abs(f) := \inf\{Re(\lambda) : \widehat{f} \quad existe\}.$$

Proposición 8. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$. Entonces la Integral de Laplace $\widehat{f}$ converge si $Re(\lambda) > abs(f)$ y diverge si $Re(\lambda) < abs(f)$.*

Demostración. Claramente $\widehat{f}$ no existe si $Re\lambda < abs(f)$.
Para $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sea

$$G_0(t) := \int_0^t e^{-\lambda_0 s} f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $t \geq 0$, integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds &= \int_0^t e^{-(\lambda-\lambda_0)s} e^{-\lambda_0 s} f(s)ds \\ &= e^{-(\lambda-\lambda_0)t} G_0(t) + (\lambda - \lambda_0) \int_0^t e^{-(\lambda-\lambda_0)s} G_0(s)ds.\end{aligned}$$

SI $\widehat{f}(\lambda_0)$ existe, entonces G_0 es acotado. Más aún, se sigue de lo anterior que $\widehat{f}(\lambda)$ existe si $Re(\lambda) > Re(\lambda_0)$ y

$$\widehat{f}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \int_0^\infty e^{-(\lambda-\lambda_0)s} G_0(s)ds \qquad (Re(\lambda) > Re(\lambda_0)).$$

Esto muestra que $\widehat{f}(\lambda)$ existe si $Re(\lambda) > abs(f)$.

Si $\widehat{f}(\lambda)$ converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $abs(f) := -\infty$. Si el dominio de convergencia es vacío, entonces $abs(f) := \infty$. Una función f es llamada **Transformada de Laplace** si $abs(f) < \infty$.

Ejemplo. Sea $f(t) := (1+t)^{-1}$. Entonces $abs(f) = 0$ puesto que la integral de Laplace $\widehat{f}(\lambda)$ converge para $\lambda > 0$ pero no para $\lambda = 0$. Si $\lambda = ir, r \neq 0$, entonces usando integración por partes se tiene que $\widehat{f}(ir)$ converge y

$$\widehat{f}(ir) = \frac{1}{ir} - \frac{1}{ir}\int_0 \infty \frac{e^{-irt}}{(1+t)^2}dt.$$

Asi, el dominio de convergencia de $\widehat{f}(\lambda)$ es $\{Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0\}$.
Para $f(t) := 1$, el dominio de convergencia de $\widehat{f}(\lambda)$ es el semiplano abierto $\{Re\lambda > 0\}$.
para $f(t) = (1+t^2)^{-1}$ es el semiplano cerrado $\{Re\lambda \geq 0\}$.
Mencionamos dos funciones especiales que seran usadas en algunos ejemplos posteriores de la derivada e integral fraccionario. A saber:

Definición 10.

- *La función de* ***Mittag-Leffler*** *es una función entera y está definida mediante la serie de potencias:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \quad , \alpha > 0, \ \ \beta > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

- ***La función hipergeométrica de Gauss*** *se define mediante la expresión:*

$${}_2F_1(a,b;c;x) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt, \quad 0 < b < c.$$

Además, la función hipergeométrica de Gauss posee las siguientes propiedades:

(a) ${}_2F_1(a,b;c;x) ={}_2 F_1(b,a;c;x)$

(b) ${}_2F_1(a,b;b;x) = (1-x)^{-a}$.

Para una mayor información sobre las funciones especiales mencionadas anteriormente se recomienda consultar [18]. Las siguientes definiciones son herramientas que se usan con frecuencia en el transcurso del trabajo.

Definición 11. *Sea $A \in \mathcal{B}(X)$.*

(a) El conjunto resolvente de A denotado por $\rho(A)$ es

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{existe el operador } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}.$$

(b) El espectro de A, se denota por $\sigma(A)$ y es el complemento del conjunto resolvente. Es decir,

$$\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A).$$

(c) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, el operador $(\lambda I - A)^{-1}$ se denomina operador resolvente de A y se denota por $R(\lambda, A)$.

1.1.3. Funciones Absolutamente Continuas

Definición 12. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **absolutamente continua** en $[a, b]$, si y sólo si,*
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos $\{(a_k, b_k)\} \subset [a, b]$ disjuntos dos a dos se satisface:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

El espacio lineal de funciones absolutamente continuas se simboliza AC([a,b]).

Observaciones

(a) La definición anterior se satisface si la expresión $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ es sustituida por

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k))\right| < \epsilon.$$

(b) El sistema de intervalos disjuntos dos a dos considerado en la definición puede ser numerable, produciendo sumas infinitas en la correspondiente definición.(ver [10].)

Ejemplos.

1. $\varphi(x) = e^x$, es absolutamente continua en $[0,1]$.

2. La función

$$f(x) = \begin{cases} x cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

es continua en $[0,1]$ pero no es absolutamente continua en dicho segmento.

Ciertas propiedades de las funciones absolutamente continuas se enuncian a continuación.Sus respectivas demostraciones pueden encontrarse en [10].

Proposición 9. *(a) Toda función $AC([a,b])$ es continua, y por lo tanto uniformemente continua. El recíproco es falso (ver ejemplo 2).*

(b) Sean $f, g \in AC([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f + \beta g \in AC([a,b])$, $fg \in AC([a,b])$. Además, si $\forall x \in [a,b] \quad g(x) \neq 0$, entonces $f/g \in AC([a,b])$.

(c) Si $f \in AC([a,b])$ entonces p.c.t.[1] $x \in [a,b]$, $\exists f'(x)$ y además $f' \in L_1([a,b])$.

(d) Si $f \in AC([a,b])$ y $f'(x) = 0$ p.c.t. $x \in [a,b]$, entonces f es constante.

(e) $\varphi \in AC([a,b])$ si y sólo si

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad f \in L_1([a,b]), \qquad C - constante. \tag{1.5}$$

O sea que la clase $AC([a,b])$ coincide con la clase de primitivas de funciones Lebesgue integrables.

(f) Si $f \in L([a,b])$, entonces $\varphi'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in [a,b]$, donde φ se determina mediante (1.5). Esto es, toda función AC es la primitiva de su derivada.

Definición 13. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $AC^{\,n}([a,b])$ al espacio de funciones $f(x)$ continuamente diferenciables en $[a,b]$ hasta el orden $n-1$, con $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$. Además $C^{\,n}([a,b]) \subset AC^{\,n}([a,b]) \subset C^{\,n-1}([a,b])$.*

[1]p.c.t: Expresión usada en teoría de la medida que significa para casi todo

El siguiente teorema es la generalización de (1.5), lo que permite caracterizar al espacio $AC^{\,n}([a,b])$. Su demostración puede ser consultada en [16].

Teorema 3. *El espacio $AC^{\,n}([a,b])$ consta únicamente de las funciones f, representables en la forma*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k,$$

donde $\varphi \in L_1([a,b])$ y c_k son constantes arbitrarias, $k = 0,...,n-1$.

Según este teorema, la clase $AC^{\,n}([a,b])$ consta de funciones que se representan mediante una integral n-múltiple de Lebesgue de una función sumable, mas un polinomio de grado $n-1$.

Definición 14. ***Espacios de Sobolev***

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Los Espacios de Sobolev $W^{m,p}(I;X)$ se pueden definir de la siguiente manera:

$$W^{m,p}(I;X) := \Big\{ f : I \to X | \exists \psi \in L^p(I;X), f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{(k)!} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \psi(t), \quad t \in I \Big\},$$

donde $I = [0,\tau]$.

Observación.

Notar que $\psi(t) = f^{(m)}(t)$ y además $c_k = f^{(k)}(0)$.

Por otra parte, si consideramos

$$W_0^{m,p}(I;X) := \Big\{ f \in W^{m,p}(I;X) | f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0,1,...,m-1 \Big\},$$

entonces

$$f \in W_0^{m,p}(I;X) \Leftrightarrow f = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \psi$$

para algún $\psi \in L^p(I;X)$.

1.2. Derivada e Integral fraccionaria

En el transcurso de esta sección consideramos para $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ el menor entero mayor que α e $I = (0, T)$ para algun $T > 0$.

Definición 15. *Sea $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Se define para $\beta > 0$, la función*

$$g_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

donde $\Gamma(\beta)$ es la función Gamma.

Definición 16. *La **integral fraccionaria de Riemann-Liouville** de orden α esta definida de la siguiente manera:*

$$J^\alpha f(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds = (f * g_\alpha)(t) \tag{1.6}$$

donde $f \in L(I; X), t > 0$.

Proposición 10. *i)* $g_\beta * g_\alpha = g_{\beta+\alpha}$

ii) $J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} \qquad \alpha, \beta \geq 0$

Demostración

i) De la definición

$$(g_\beta * g_\alpha)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\beta-1}(t-x)^{\alpha-1} dx.$$

Ahora consideremos $\tau = \dfrac{x}{t}$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} (g_\beta * g_\alpha)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\beta-1} t^{\alpha-1} (1 - x/t)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t\tau)^{\beta-1} t^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} t d\tau \\ &= t^{\alpha+\beta-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= t^{\alpha+\beta-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = g_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

ii) Sea $f \in L(I;X)$, luego

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= J^\alpha \Big[f * g_\beta \Big](t) \\ &= (f * g_\beta) * g_\alpha(t) \\ &= f * (g_\beta * g_\alpha)(t) \\ &= f * g_{\alpha+\beta}(t) \\ &= J^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Definición 17. *La **derivada fraccionaria de Riemann-Liouville** de orden $\alpha > 0$ se define como*

$$D^\alpha f(t) := D^m (g_{m-\alpha} * f)(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t), \qquad m = \lceil \alpha \rceil \tag{1.7}$$

para toda $f \in L^1(I)$ tal que $(g_{m-\alpha} * f) \in W^{m,1}(I;X)$ y donde $D^m := \frac{d^m}{dx^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Mostramos a continuación algunos ejemplos de derivada e integral fraccionaria de ciertas funciones usando las definiciones establecidas anteriormente.

Proposición 11. *Si $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ donde $\beta > 0$ entonces*

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

Demostración

Por definición

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Sea $\tau = \dfrac{t-a}{x-a}$, de donde $(x-a)(1-\tau) = x - t$. Luego,

$$\begin{aligned} (J^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 \tau^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \mathcal{B}(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Proposición 12. *Sea* $\varphi(x) = x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}$, *donde* $x \in [0,1]$, $\beta > 0$ *y* γ *arbitrario.Entonces*

$$(J^\alpha \varphi)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\beta+\alpha-1} F_1(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; x)$$

Demostración

Por definición

$$(J^\alpha \varphi)(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Sea $\tau = \dfrac{x-t}{x}$, *de donde* $x(1-\tau) = t$. *Luego,*

$$(J^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}(1-x(1-\tau))^{\gamma-1}(x\tau)^{\alpha-1} d\tau.$$

Sea $\sigma = 1-\tau$. *Entonces*

$$(J^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 \sigma^{\beta-1}(1-x\sigma)^{\gamma-1}(1-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma;$$

$$(J^\alpha \varphi)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\beta+\alpha-1} F_1(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; x).$$

Proposición 13. *Para la función* $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, *con* $\lambda < 0$ *su integral fraccionaria está dada por la expresión:*

$$(J^\alpha \varphi)(x) = e^{\lambda x}(x-a)^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda x - \lambda a).$$

Proposición 14. *Sea* $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1$. *Entonces* $(D^\alpha f)(x) = 0$.

Demostración.

Por definición

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Sea $\quad \tau = \dfrac{t-a}{x-a}$. *Luego,*

$$x - (x-a)\tau - a = x - t \Rightarrow (x-a)(1-\tau) = x-t.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}(D^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{[\tau(x-a)]^{\alpha-1}(x-a)}{[(x-a)(1-\tau)]^\alpha}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\mathcal{B}(\alpha,1-\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Observación

Un resultado más general que el anterior es considerar $f(x) = (x-a)^{-\mu}$ con $\mu < 1$, $\alpha + \mu < 1$, en cuyo caso

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}. \tag{1.8}$$

Observación.

Sabemos que las operaciones de diferenciación e integración no son operaciones inversas en el sentido estricto: $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$; sin embargo, $\int\limits_a^x f'(t)dt \neq f(x)$ debido a la aparición de la constante $-f(a)$.

Así mismo $(\frac{d}{dx})^n J^n f(t) = f$, pero $J^n f^{(n)} \neq f$, difiriendo de f en un polinomio de orden $n-1$.

Es natural esperar que $D^\alpha J^\alpha f = f$, aunque $J^\alpha D^\alpha f$ no necesariamente coincida con $f(x)$ debido a la aparición de las funciones $(x-a)^{\alpha-k}$, donde $k = 1, 2, ..., \lceil\alpha\rceil + 1$ las cuales juegan el papel de polinomios para la diferenciación fraccionaria.

Teorema 4. *Sea $\alpha > 0$ y $m = \lceil\alpha\rceil$. Entonces para cualquier $f \in L(I;X)$*

$$D^\alpha J^\alpha f = f. \tag{1.9}$$

Más aún, si $f \in L(I;X)$ y $(g_{m-\alpha} * f) \in W^{m,1}(I;X)$ entonces

$$J^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(g_{m-\alpha} * f)^k(0)g_{\alpha+k+1-m}(t) \tag{1.10}$$

En particular, si $(g_{m-\alpha} * f) \in W_0^{m,1}(I;X)$ entonces $J^\alpha D^\alpha f = f$.

Demostracion.

Por definición,

$$J^{\alpha} f = g_{\alpha} * f \in L(I; X),$$

además

$$g_{m-\alpha} * (J^{\alpha} f) = g_{m-\alpha} * g_{\alpha} * f = g_m * f \in W_0^{m,1}(I).$$

Luego, bajo la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se tiene:

$$D^{\alpha} J^{\alpha} f = D^m [g_{m-\alpha} * J^{\alpha} f] = D^m [g_m * f] = D^m J^m f.$$

Ahora, si $(g_{m-\alpha} * f) \in W_0^{m,1}(I)$ entonces en virtud de la definición de espacios de Sobolev se tiene:

$$g_{m-\alpha} * f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{k+1}(t) + g_m * \psi \tag{1.11}$$

donde $\psi \in L^1(I)$ y $c_k = (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)$.

Entonces,

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f = J^{\alpha} D^m [g_{m-\alpha} * f] = J^{\alpha} \psi \tag{1.12}$$

Por otra parte, de la ecuacion (1.11) se deduce:

$$g_m * f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{\alpha+k+1}(t) + g_{\alpha+m} * \psi$$

así

$$D^m (g_m * f) = f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{\alpha+k+1-m}(t) + g_{\alpha} * \psi \tag{1.13}$$

Luego, de (1.12) y (1.13) se deduce el resultado.

Corolario 1. *Si $\alpha \in (0, 1)$ y si $(g_{m-\alpha} * f) \in W^{1,1}(I; X)$ entonces de (1.10) se tiene*

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - (g_{1-\alpha} * f)(0) g_{\alpha}(t)$$

Corolario 2. *Si $f \in W^{m,1}(I;X)$ entonces $D^\alpha f$ se puede representar en la forma*

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k-\alpha+1}(t) + J^{m-\alpha} D^m f(t). \tag{1.14}$$

En ocasiones resulta conveniente usar el segundo termino de la parte derecha de (1.14) como una definición de derivada fraccionaria de orden α. Las propiedades de tal definición pueden ser consultadas en [12] . Esta definicion alternativa de derivada fraccionaria fue introducida por Caputo [12] ,[13] y desarrollada en trabajos sobre la teoría de la viscoelasticidad lineal. En otras palabras, la derivada fraccionaria según Caputo se define como sigue.

Definición 18. ***(Derivada de Caputo)*** *La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ se define por*

$$\boldsymbol{D}^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t).$$

Algunos resultados simples que se deducen de la definición son:

$$J^\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \qquad D^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}, \quad \beta \geq \alpha \tag{1.15}$$

En particular, $D^\alpha g_\alpha = 0$. Notar también que $D^\alpha 1 = g_{1-\alpha}, \alpha \leq 1$, mientras que $\mathbf{D}^\alpha 1 = 0$ para todo $\alpha > 0$.

Si en lugar de que $f \in W^{m,1}(I;X)$ solo se tiene $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(I;X)$ y $f \in C^m(I;X)$, entonces podemos considerar la siguiente representación equivalente, la cual se sigue de (1.14), (1.15).

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = D^\alpha \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^k(0) g_{k+1}(t) \Big) \tag{1.16}$$

La derivada de Caputo $\mathbf{D}^\alpha$ es también un inverso a izquierda de J^α pero en general no es inverso a derecha, es decir:

$$\mathbf{D}^\alpha J^\alpha f = f \ , \qquad f \in L^1(I;X), \tag{1.17}$$

$$J^\alpha \mathbf{D}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^k(0) g_{\alpha+k+1}(t) \tag{1.18}$$

siempre que $f \in C^{m-1}(I;X)$ y se cumpla $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(I;X)$.
Además, si $\alpha \in (0,1)$, $(g_1 * f) \in W^{1,1}(I;X)$ y $f \in C(I;X)$, entonces

$$J^{\alpha}\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0).$$

Capítulo 2

Operador solución

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de la solución del problema de una ecuación integral no homogénea de orden fraccionario usando la derivada fraccionaria de Caputo. A saber,

$$D^{\beta}u(t) = \eta Au(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t), \quad u(0) = x; \;\; u'(0) = y, \;\; \beta \in (1,2), \, \eta > 0. \tag{2.1}$$

donde f pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,1}(I, X_A)$, $k(t)$ es un núcleo que satisface ciertas condiciones de regularidad y A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 uniformemente acotado. La propiedad de continuidad de la solución $u_{\beta}(t)$ como función de $\beta > 0$ y su orden de derivada fraccionaria $D^{\beta}u_{\beta}(t)$ para $\beta \to 1^{+}$ es estudiada en el capitulo siguiente.
El problema para ordenes de β en $(0,1]$ puede consultarse en [7].
Primeramente establecemos algunas definiciones y teoremas necesarios para el propósito del capítulo,sin embargo comenzamos con una breve introducción.

2.1. Problema de Cauchy Abstracto

Sean X un espacio de Banach y A un operador lineal $A : D(A) \to X$. Para $x \in X$ el problema Abstracto de Cauchy para A con valor inicial x consiste en encontrar una solución $u(t)$ para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ \quad u(0) = x, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde por una solución entendemos una función $u : [0, \infty) \to X$ tal que $u(t)$ es continua para $t \geq 0$, continuamente diferenciable, $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y (2.2) se satisface. Comenzamos el estudio de la ecuación (2.2) analizando en principio espacios de dimensión finita.

Definición 19. *Sean $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $t \in \mathbb{R}_+$. La matriz exponencial e^{tA} es definida por*

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Observación. Claramente si se considera cualquier norma sobre $X = \mathbb{C}^n$ y la correspondiente norma matricial sobre $M_n(\mathbb{C})$ se muestra que la sumas parciales de la serie forma una sucesión de Cauchy, así la serie definida anteriormente converge y además satisface

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$$

para todo $t \geq 0$.

Proposición 15. *Para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ la aplicación $T : \mathbb{R}_+ \to M_n(\mathbb{C})$ definida por*

$$T(t) = e^{tA}$$

es continua y satisface

$$\begin{cases} T(t+s) = T(t)T(s); \quad \forall t, s \geq 0 \\ T(0) = I \end{cases} \tag{2.3}$$

Demostración

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ es convergente se tiene:

$$\begin{aligned}
T(t)T(s) =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} . \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{k+j} A^{k+j}}{k! j!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{s^{n-k} t^k A^n}{k!(n-k)!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+t)^n A^n}{n!} \\
=& T(t+s).
\end{aligned}$$

Ahora, para mostrar que $T(t) = e^{tA}$ es continua observar que si $T(t)$ satisface (2.3) entonces

$$T(t+h) - T(t) = e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I).$$

Por tanto es suficiente probar que $\lim_{h \to 0} e^{hA} = I$.

En efecto,

$$\|e^{hA} - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n \|A\|^n}{n!} = -1 + e^{|h| \|A\|}.$$

Observación. La aplicación $\psi : t \to T(t)$ es un homomorfismo entre el grupo aditivo $(\mathbb{R}_+, +)$ y $GL(n, \mathbb{C})$. Teniendo en cuenta (2.3), consideremos la siguiente terminología.

Definición 20. *Sea $A \in GL(n, \mathbb{C})$. La familia $\{e^{tA}\}_{t \geq 0} \subset GL(n, \mathbb{C})$ se denomina semigrupo de un parámetro generado por la matriz A.*

Proposición 16. *La función $T : \mathbb{R}_+ \to M_n(\mathbb{C})$ definida por $T(t) := e^{tA}$ para algún $A \in M_n(\mathbb{C})$ es diferenciable y satisface la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} T(t) = AT(t) \\ T(0) = I. \end{cases} \tag{2.4}$$

Además $A = T'(0)$.

Demostración

Probemos que $T(t) := e^{tA}$ satisface (2.4). La ecuación (2.3) implica que

$$\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = \frac{T(h)-I}{h}.T(t)$$

para todo $t, h \in \mathbb{R}$. Así es suficiente mostrar que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T(h)-I}{h} = A$ para asegurar que $T(t)$ es diferenciable y además satisface la ecuación diferencial.

En efecto,

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}\|A\|^n}{n!} = \frac{-1+e^{|h|\|A\|}}{|h|} - \|A\|.$$

Como $\frac{-1+e^{|h|\|A\|}}{|h|} - \|A\|$ tiende a cero cuando h tiende a cero, se concluye que la función $T(t) = e^{tA}$ satisface (2.4).

Finalmente, por definición de derivada se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} = A =: T'(0).$$

2.2. Semigrupos y generadores infinitesimales

La noción de semigrupo de operadores lineales es una extensión de la exponencial de una matriz para el caso posible en que el exponente es un operador no acotado.

En esta sección el lector debe estar familiarizado con conceptos de la teoría de espacios de Banach y algunos resultados sobre operadores lineales acotados.

2.2.1. Semigrupo uniformemente continuo

Definición 21. *Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ se denomina un semigrupo de un parámetro de operadores lineales acotados (o simplemente semigrupo) si:*

(a) $T(0) = I$

(b) $T(t+s) = T(t)T(s); \quad \forall t, s \geq 0.$

Si un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisface además

$$\|T(t) - I\| \underset{t\to 0^+}{\to} 0,$$

decimos que es un *semigrupo uniformemente continuo.*

Ejemplo. Un primer ejemplo significativo de un semigrupo uniformemente continuo esta dado por $t \to e^{tA}$, donde e^{tA} es la exponencial de la matriz tA. Observar también que $T(t) = e^{tA}$ satisface la ecuación diferencial (2.4). Para verificar lo anterior remitirse a la proposición 15 de la sección anterior.

Mas adelante mostraremos que todos los semigrupos uniformemente continuos son de la forma e^{tA}, para algún $A \in B(X)$ y satisfacen (2.4).

El siguiente ejemplo muestra la existencia de semigrupos que no son uniformemente continuos.

Ejemplo. Sea X el espacio de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}$, dotado con la norma del supremo $\|\|_\infty$. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido por

$$[T(t)f](s) := f(t+s)$$

Claramente se verifica que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores lineales. Observar además que en este caso, la propiedad de continuidad uniforme de semigrupo en equivalente a la equicontinuidad de la bola unitaria en X, propiedad que obviamente no se satisface, por tanto el semigrupo no es uniformemente continuo. Usualmente el semigrupo $[T(t)f](s) := f(t+s)$ es denominado semigrupo de translación.

Definición 22. *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ *un semigrupo. Se define el generador infinitesimal de* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *como el operador*

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \tag{2.5}$$

siempre que el limite existe.

Observaciones.

- En caso de existir un generador infinitesimal de un semigrupo $T(t)$ éste es único.

- Si $D(A)$ denota el dominio del generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ entonces es claro que $D(A)$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que el límite dado en (2.5) existe. Además $D(A)$ es un subespacio de X y A posiblemente un operador lineal no acotado.

- Sea $X = GL(n, \mathbb{C})$. Si denotamos por $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal del semigrupo $T(t) = e^{tA}$ dado anteriormente, se tiene que $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y esta definido por $\mathcal{A}x := Ax$. Esta observación nos permite ver la relación existente entre semigrupos de operadores lineales y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Ejemplo. El generador infinitesimal del semigrupo $[T(t)f](s)$ mencionado anteriormente esta dado por

$$D(A) := \left\{ f \in X | \exists \lim_{t\to 0} \frac{f(t+.)-f}{t} = f' \textit{fuertemente en} \quad X \right\},$$

y

$$Af = f'.$$

Observemos que si $f \in D(A)$, entonces $u(t,s) = [T(t)f](s) := f(t+s)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u_t = u_s \\ u(0,s) = f(s). \end{cases}$$

Proposición 17. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es un semigrupo uniformemente continuo entonces, para cada $t \geq 0$, $T(t)$ es invertible.*

Demostración.

Por hipótesis

$$\|T(t) - I\|_{B(X)} \underset{t\to 0^+}{\to} 0,$$

entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t) - I\|_{B(X)} < 1$$

para cada $t \in (0, \delta]$.

Así para cada $t \in (0, \delta]$, $T(t)$ es invertible.

Si $t > \delta$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $\eta \in (0, \delta]$ tal que $t = n\delta + \eta$. Por tanto $T(t) = T(\delta)^n T(\eta)$ y se tiene que $T(t)$ es invertible.

Teorema 5. *Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y sólo si $D(A) = X$ y $A \in B(X)$.*

Demostración.

a) Puesto que $T(.)$ es continua en $\mathbb{R}_+$ podemos considerar la función

$$V(t) = \int_0^t T(s)xds$$

para cada $t \geq 0$.

Claramente V es diferenciable y $V'(t) = T(t)$ para todo $t \geq 0$. Más aún,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} V(t) = I$$

ya que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} V(t) = \lim_{t \to 0} \frac{V(t) - V(0)}{t} = V'(0) = T(0) = I.$$

Por lo anterior podemos decir que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} T(s)ds - I \right\| < 1,$$

así el operador $\dfrac{1}{t_0} V(t_0)$ es invertible y consecuentemente $V(t_0)$ tiene esta misma propiedad.

Ahora, si $h > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^{t_0} T(s)ds &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T(s+h)ds - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t_0+h} T(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \Big(\int_{t_0}^{t_0+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \Big). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) = \Big(\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} T(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds \Big) \Big(\int_0^{t_0} T(s)ds \Big)^{-1}.$$

La parte izquierda de la ecuación converge cuando h tiende a 0 a valores positivos,de modo que la parte derecha tiene esta misma propiedad; sin embargo la convergencia es en la norma unitaria de operadores de $B(X)$, lo cual implica que la convergencia también es puntual y se deduce

$$A = (T(t_0) - I)\Big(\int_0^{t_0} T(s)ds\Big)^{-1}.$$

Por tanto $A \in B(X)$.

b) Supongamos ahora que $A \in B(X)$.

Para cada $t \geq 0$ sea

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Mostrar que $T(t)$ es un semigrupo uniformemente continuo es consecuencia inmediata de la demostración de la proposición 15.

Para completar la demostracion resta probar que A es el generador infinitesimal de este semigrupo. Para ellos es suficiente mostrar que

$$\lim_{t\to 0}\Big\|\frac{T(t) - I}{t} - A\Big\|_{B(X)} = 0.$$

En efecto,

$$\Big\|\frac{T(t) - I}{t} - A\Big\|_{B(X)} = t\Big\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}A^n}{n!}\Big\|_{B(X)} \leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|}.$$

Según lo anterior, cada operador lineal acotado A es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo. La siguiente proposición muestra que éste semigrupo es único.

Proposición 18. *Sean $T_1(t)$ y $T_2(t)$ dos semigrupos uniformemente continuos. Supongamos que*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_1(t) - I}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{T_2(t) - I}{t}$$

entonces $T_1(t) = T_2(t), \forall t \geq 0$.

Demostración. Mostremos que para $\tau > 0$, $T_1(t) = T_2(t)$ para $0 < t < \tau$. Puesto que las aplicaciones $t \to ||T_1(t)||$ y $t \to ||T_2(t)||$ son continuas, existe una constante C tal que $||T_1(t)||||T_2(s)|| < C$ para cada $0 \leq s < t \leq \tau$. Dado $\epsilon > 0$, se sigue de la hipótesis que existe $\delta > 0$ tal que

$$h^{-1}||T_1(h) - T_2(h)|| < \frac{\epsilon}{C\tau} \quad 0 < h \leq \delta. \tag{2.6}$$

Sea $0 \leq t \leq \tau$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. De la propiedad de semigrupo y de (2.6) se tiene:

$$||T_1(h) - T_2(h)|| = ||T_1\Big(\frac{nt}{n}\Big) - T_2\Big(\frac{nt}{n}\Big)||$$

$$||T_1(h) - T_2(h)|| \leq \sum_{k=0}^{n-1} ||T_1\Big(\frac{(n-k)t}{n}\Big)T_2\Big(\frac{kt}{n}\Big) - T_1\Big(\frac{(n-k-1)t}{n}\Big)T_2\Big(\frac{(k+1)t}{n}\Big)|| \leq Cn\frac{\epsilon}{C\tau}\frac{t}{n} < \epsilon.$$

Puesto que ϵ es arbitrario, $T_1(t) = T_2(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$.

2.2.2. Semigrupos fuertemente continuos

En esta sección estudiaremos semigrupos de operadores acotados que satisfacen una condición más débil que la continuidad uniforme. Como consecuencia encontraremos condiciones sobre A para que el problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

tenga solución en este contexto.

Definición 23. *Se dice que un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores acotados es fuertemente continuo si para cada $x \in X$ se tiene que $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$. También se dice que $T(t)$ es de clase C_0 o que es un semigrupo C_0.*

Observación.

Observemos que todo semigrupo uniformemente continuo también es un semigrupo C_0. La diferencia está en que un semigrupo uniformemente continuo $T(t)$ converge uniformemente a la identidad cuando $t \to 0$, mientras que un semigrupo C_0 solamente converge en el sentido fuerte.

Ejemplo. Sea X el espacio de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}$, dotado con la norma del supremo $\|\|_\infty$. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido por

$$[T(t)f](s) := f(t+s)$$

Anteriormente mostramos que $T(t)$ asi definido es un semigrupo que NO es uniformemente continuo, sin embargo, éste es un semigrupo C_0 ya que en virtud de la continuidad uniforme de f se sigue que $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)f = f$ para toda $f \in X$.
Al igual que los semigrupos uniformemente continuos, los semigrupos C_0 satisfacen una propiedad de acotación para su norma, la cual mencionamos a continuación (consultar [17]).

Teorema 6. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semigrupo.*
Entonces existen $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \tag{2.7}$$

para cada $\forall t \geq 0$.

Demostración

Mostremos en principio que si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo entonces existe $\delta > 0$, $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad t \in [0, \delta].$$

En efecto, razonando por contradicción suponemos que existe una sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a cero y tal que $\|T(\delta_n)\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
Por el teorema de Banach-Steinhaus, existe $x \in X$ tal que $\{\|T(\delta_n)x\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, lo cual es una contradicción ya que $T(.)$ es continua para $t = 0$.
Por otra parte, si $t \geq 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $\eta \in [0, \delta)$ tal que $t = n\delta + \eta$.
Así,

$$\|T(t)\|_{B(X)} = \|T^n(\delta)T(\eta)\|_{B(X)} \leq \|T(\delta)\|^n_{B(X)}\|T(\eta)\|_{B(X)} \leq MM^n.$$

Pero $n = \dfrac{t-\eta}{\delta} \leq \dfrac{t}{\delta}$, de modo que

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = Me^{t\omega},$$

donde $\omega = s\dfrac{1}{\delta}\ln M$.

Observación.

Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo con generador A entonces en (2.7) se tiene que $M = 1$ y $\omega = \|A\|$.

Definición 24. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0, éste recibe el nombre de semigrupo de contracciones si y sólo si, para cada $t \geq 0$ se satisface $\|T(t)\|_{B(X)} \leq 1$.*

Proposición 19. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0 semigrupo, entonces para cada $x \in X$ la función $\varphi_x : [0,\infty) \to X$ definida por $\varphi_x(t) = T(t)x$ es continua.*

Demostración

Sean $t \geq 0$ y $h \in [0,t]$.Entonces

$$\|\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)\| = |T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|$$

Similarmente,

$$\|\varphi_x(t-h)-\varphi_x(t)\| = |T(t-h)x-T(t)x\| \leq \|T(t-h)\|\|x-T(h)x\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|x-T(h)x\|$$

$$\|\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|$$

Observar que $\|T(h)x - x\| \to 0$ cuando $h \to 0$ decrecientemente.

Por tanto la aplicación φ_x es continua para cada $x \in X$.

Observaciones

a) Notemos que la proposición anterior permite dar sentido a la integral $\displaystyle\int_a^b T(s)xds$ para todo $x \in X$.

b) La definición de generador infinitesimal para un semigrupo C_0 es la misma que para un semigrupo uniformemente continuo, es decir:

$$D(A) := \left\{x \in X |\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe}\right\}$$

y se define por:

$$Ax := \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} =: \frac{d^+T(t)x}{dt}|_{t=0} \quad , x \in D(A).$$

Veremos que en este caso, aunque es posible que $D(A) \subsetneq X$, se tiene que $\overline{D(A)} = X$. Mas aún, dado que la continuidad fuerte es una condición más débil que la continuidad uniforme, esperamos que A también tenga una propiedad un poco mas débil que el ser acotado. El siguiente resultado será útil para confirmar esos dos hechos.

Lema 1. *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces:*

a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \quad x \in X.$$

b) Para cada $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$. Además,

$$A\Big[\int_0^t T(s)xds\Big] = T(t)x - x.$$

c) Si $x \in D(A)$ y $T(t)x \in D(A)$ entonces

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Para cada $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Probamos a continuación algunos de las principales propiedades mencionadas anteriormente del generador infinitesimal de un semigrupo C_0.

Proposición 20. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 entonces* $\overline{D(A)} = X$.

Demostración

Para cada $x \in X$, construiremos una sucesión $\{x_n\} \subset D(A)$ que converge a x.

Consideremos

$$x_n := n \int_0^{1/n} T(s)x ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta el lema anterior, de la parte (b) podemos concluir que $x_n \in D(A)$, además, bajo el mismo lema, el inciso (a) nos permite afirmar que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ como se queria probar.

Observaciones

a) El resultado anterior se puede extender de la siguiente manera:

   Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 y $D(A^n)$ es el dominio del operador A_n, entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ es denso en X.

   La demostracion de este resultado puede ser consultada en [Ioan Vrabie].

b) Aunque el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 no necesariamente es acotado, este sí tiene una propiedad similar, pero un poco mas débil.

Proposición 21. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces A es cerrado.*

Demostración

Mostremos que A es cerrado, es decir; suponer que $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ y además $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$, probar que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

Afirmación:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds = \int_0^t T(s)y ds$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t T(s)Ax_n ds - \int_0^t T(s)y ds\right\| &= \left\|\int_0^t T(s)[Ax_n - y]ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(s)\|\|Ax_n - y\|ds \\
&\leq \int_0^t Me^{\omega s}\|Ax_n - y\|ds \\
&\leq \int_0^t Me^{\omega t}\|Ax_n - y\|ds \\
&\leq Mte^{\omega t}\|Ax_n - y\| \underset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud del lema anterior, parte (d)

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds,$$

se tiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y ds$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \overset{(a)}{=} y$$

esto es, $x \in D(A)$.

Finalmente, de la definición de operador infinitesimal de un semigrupo C_0 se obtiene que $Ax = y$.

Al igual que en el caso de semigrupos uniformemente continuos, el generador infinitesimal caracteriza al semigrupo, de esta manera se tiene la siguiente proposición.

Proposición 22. *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dos semigrupos C_0 con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Entonces $A = B$ si, y sólo si $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración

i. Claramente de la definición de generador infinitesimal se tiene que si $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$, entonces $A = B$.

ii. Mostremos que $T(t) = S(t)$ sabiendo que $A = B$.

Para cada $t \geq 0$ definimos la aplicación $\varphi_t : [0,t] \to X$ como sigue:

$$\varphi_t(s) := T(t-s)S(s)x.$$

De la parte (c) del lema anterior y del uso de la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\varphi_t(s) &= \Big[\frac{d}{ds}T(t-s)\Big]S(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)\\
&= -AT(t-s)S(s) + T(t-s)BS(s)\\
&= -T(t-s)AS(s) + T(t-s)AS(s)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que φ_t es constante en $[0,t]$, en particular $\varphi_t(0) = \varphi_t(t)$, esto es $T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X.$

2.2.3. Teorema de Hille-Yosida

En esta seccion mostramos uno de los principales resultados en la teoria de semigrupos C_0, a saber, el teorema de Hille-Yoshida. Mas precisamente, este resultado establece condiciones suficientes y necesarias para que un operador lineal A genere un semigrupo C_0 de contracciones.

Recordemos que $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{existe el operador } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$ es el conjunto resolvente de A y $\mathrm{R}(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ es el operador resolvente de A.

Teorema 7. ***(Hille-Yosida).*** *Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones si y sólo si :*

(i) *A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$ y para cada $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda; A)\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demostración.

Sea $A : D(A) \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

(i) La proposicion 20 junto con la proposicion 21 aseguran que A esta definido densamente y es cerrado.

(ii) Sea $\lambda > 0$. Para cada $x \in X$ se define

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Observése que la integral de la definicion de $R(\lambda)x$ es convergente. Más aún,

$$\|R(\lambda)x\|_X = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|.$$

Luego

$$\|R(\lambda)\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Afirmamos que $R(\lambda)$ coincide con $R(\lambda; A)$.

Probar que $R(\lambda)$ coincide con $R(\lambda; A)$ es equivalente a mostrar que $R(\lambda)$ es el inverso a derecha e izquierdo del operador $\lambda I - A$.

Sean $x \in X$, $h > 0$ y $\lambda > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)R(\lambda)x =& \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h) x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ =& \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda t} T(t) x dt. \end{aligned}$$

Como el lado derecho de la ecuación converge a $\lambda R(\lambda)x - x$ cuando h tiende a cero, se sigue que $R(\lambda)x \in D(A)$ y por tanto

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I,$$

es decir, $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$.

Por otra parte,veamos que $R(\lambda)$ es también el inverso derecho de $\lambda I - A$.

Para cada $x \in D(A)$ observar:

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax =& \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A x dt \\ =& \int_0^\infty e^{-\lambda t} [\frac{d}{dt} T(t) x] dt \\ =& - x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ =& - x + \lambda R(\lambda) x \end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior se tiene:

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I$$

así $R(\lambda)$ es el inverso izquierdo del operador $(\lambda I - A)$.

En orden a probar que las condiciones (i) y (ii) son suficientes para que A sea el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones se requiere de algunos lemas.
En lo que sigue se supone que A satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema.

Lema 2. *Para cada $x \in X$,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x. \tag{2.8}$$

Demostración.
Sean $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|AR(\lambda; A)x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

Por tanto (2.8) se satisface para cada $x \in D(A)$. Sin embargo por hipótesis A esta definido densamente en X y además $\|\lambda R(\lambda; A)x\|_{B(X)} \leq 1$, lo que implica que (2.8) se satisface para cada $x \in X$.

Definición 25. *Sean $A : D(A) \subset X \to A$ y $\lambda > 0$. El operador $A_\lambda : X \to X$, definido por $A_\lambda := \lambda AR(\lambda; A)$ es llamado Aproximación Yosida de A.*

Lema 3. *Para cada $x \in D(A)$,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax. \tag{2.9}$$

Demostración.
Por definicion $A_\lambda := \lambda AR(\lambda; A)$, luego

$$A_\lambda := \lambda AR(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda(\lambda - A)R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

Luego si $x \in D(A)$ entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda : A)x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

Lema 4. *Para cada $\lambda > 0$, A_λ es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo de contraccciones $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$ que satisface*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{B(X)} \leq 1 \tag{2.10}$$

para cada $t \geq 0$. Mas aun, para cada $x \in X$ y cada $\lambda, \mu > 0$ se tiene

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{2.11}$$

Demostración.

Como $A_\lambda \in B(X)$ y además $D(A_\lambda) = X$ se sigue en virtud del teorema 5 que A_λ genera un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}; t \geq 0\}$.

Por otra parte,

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\|_{B(X)} = \left\|e^{t[\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I]}\right\|_{B(X)} \leq \left\|e^{t\lambda^2(R\lambda:A)}\right\|\left\|e^{-t\lambda I}\right\| \leq e^{t\lambda}e^{-t\lambda} = 1.$$

Mostremos ahora que (2.11) se satisface. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| =& \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}[e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x]ds\right\| \\
\leq& \int_0^1 \|e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}(tA_\lambda x - tA_\mu x)\|ds \\
\leq& t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.
\end{aligned}$$

Procedemos a probar la condición de suficiencia del teorema.

Para cada $\lambda > 0$ consideremos el semigrupo uniformemente continuo definido por

$$T_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}, \quad t \geq 0.$$

Teniendo en cuenta (2.9) y (2.11) se tiene que para cada $t \geq 0$, existe un operador lineal $T(t) : D(A) \subset X \to X$ tal que $\{T_\lambda(t) : t \geq 0\}$ converge uniformemente a $T(t)x$ sobre cada intervalo cerrado $[0, t_0]$. En otras palabras; para cada $t \geq 0$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x. \tag{2.12}$$

Además por (2.10) se deduce que

$$\|T(t)x\| \leq \|x\|$$

para cada $t \geq 0$ y $x \in D(A)$.

Por otra parte sabemos que $D(A)$ es denso en X, asi que $T(t)$ se puede extender por continuidad a X y la ecuación (2.12) es valida para todo $x \in X$.

Ahora, la convergencia uniforme de $\{T_\lambda(t) : t \geq 0\}$ implica que la familia $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisface también que

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq 1.$$

Adicionalmente, $t \to T(t)x$ es continua para $t \geq 0$ por ser el limite uniforme de funciones continuas $t \to e^{tA_\lambda x}$, luego $T(t)$ es fuertemente continua y en conclusión $T(t)$ es un semigrupo C_0 de contracción.

Para concluir la demostración queda mostrar que el generador infinitesimal $B : D(B) \to X$ de éste semigrupo coincide con $A : D(A) \to X$. Sea $x \in D(A)$. Usando la ecuación(2.12) se tiene que

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda} x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t T(t)Axds. \tag{2.13}$$

La última igualdad se sigue de la convergencia uniforme de $e^{sA_\lambda} A_\lambda x$ a $T(t)Ax$ sobre intervalos acotados. Sean B el generador infinitesinal de $T(t)$ y $x \in D(A)$.

Dividiendo la ecuación (2.13) por $t > 0$ y considerando el paso al límite cuando $t \to 0$ se sigue que $x \in B$ y $Ax = Bx$, así $A \subset B$.

Puesto que B es el generador infinitesimal de $T(t)$, se sigue de la condición de necesidad que $1 \in \rho(B)$, luego $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ implica que $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$ y por tanto $A = B$.

2.3. Ecuación Integral

La solución del problema homogéneo de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

puede ser descrita a través de semigrupos C_0, siendo $A : D(A) \subset X \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo C_0, $\{T_\lambda(t) : t \geq 0\}$, entonces, para cada $x \in D(A)$, la función $u : [0, +\infty) \to X$ definida por $u(t) := T(t)x$, es la única solución del problema homogéneo de Cauchy (ver sección anterior).

Si consideramos ahora la ecuación

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds \tag{2.14}$$

donde A es un operador lineal cerrado (no necesariamente acotado) con dominio denso $D(A)$ en un espacio de Banach X y $0a(t) \in L_{loc}((0,\infty)), f \in C(I;X)$,observar que para $a(t) = 1$ y $f(t) = 0$, la diferenciación de (2.14) muestra el problema de Cauchy Abstracto de primer orden.

Sin embargo, si escogemos $a(t) = t$, la diferenciación de (2.14) tiene como resultado el problema de segundo orden

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + h(t) \\ u(0) = u_0. \\ u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{2.15}$$

donde $u_0 = f(0), u_1 = f'(0)$ y $h(t) = f''(t)$. En algunos casos es posible reescribir la ecuación (2.15) como un problema de Cauchy de primer orden y por tanto estudiarse a través de la teoría de semigrupos, sin embargo también existe una teoría independiente para (2.15) que involucra el concepto de familias coseno.

En esta sección consideramos unicamente algunas definiciones y teoremas referentes a la ecuación (2.14) que serán usados posteriormente.

Definición 26. *Una función $u \in C(I;X)$ se denomina*

*(a) una **solución fuerte** de (2.14) sobre I si $u \in C(I;D(A))$ y satisface (2.14) sobre I.*

(b) una ***solución débil*** *de (2.14) sobre* I *si* $a*u \in C(I; D(A))$ *y* $u(t) = f(t)+A(a*u)(t)$ *sobre* I.

Observación. Claramente toda solución fuerte de (2.14) es una solución débil, sin embargo el recíproco en general no es cierto.

Definición 27. *El problema (2.14) se denomina* ***bien planteado*** *si para cada* $x \in D(A)$ *existe una única solución fuerte* $u(t; x)$ *de*

$$u(t) = x + (a * Au)(t), \quad t \geq 0 \tag{2.16}$$

y para cada sucesión $\{x_n\} \subset D(A)$ *tal que* $x_n \to 0$*, se sigue que* $u(t, x_n) \to 0$ *uniformemente sobre intervalos compactos.*

Definición 28. *Una familia* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ *se denomina* ***familia resolvente*** *para (2.14) si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) $S(t)$ *es fuertemente continua para* $t > 0$ *y* $S(0) = Id$.

b) $S(t)$ *conmuta con* A*, i.e,* $S(t)D(A) \subset D(A)$ *y* $AS(t)x = S(t)Ax$ *para todo* $x \in D(A), t \geq 0$.

c) Para cada $t \geq 0$*,* $S(t)x$ *es una solución de la ecuación (2.14) para todo* $x \in D(A)$.

Los siguientes resultados establecen relaciones entre familias resolventes y las soluciones de la ecuación integral (2.14).

Proposición 23. *El problema (2.14) está bien planteado si y sólo si (2.14) admite una familia resolvente* $S(t)$*. Además se tiene que* $Ran((a * S)(t)) \subset D(A)$ *para cada* $t \geq 0$ *y*

$$S(t)x = x + A\int_0^t a(t-s)S(s)xds, \quad \text{para todo } x \in D(A), t \geq 0.$$

En particular, $A(a * S(t))$ *es fuertemente continua en* X.

Demostración.

(i) Supongamos que $S(t)$ es una familia resolvente para (2.14) y mostremos que (2.14) está bien planteado. Si $S(t)$ es una familia resolvente para (2.14) entonces por propiedades de $S(t)$ se tiene que para $x \in D(A)$ la función

$$u(t) := S(t)x$$

es una solución fuerte de (2.16).

Ahora, para mostrar la unicidad de $u(t)$, suponemos que existe otra solución fuerte $v(t)$ de la ecuación (2.16). Entonces,

$$\begin{aligned}
1 * v =& (S - a * AS) * v \\
=& S * v - a * AS * v \\
=& S * v - a * \int_0^t AS(t-s)v(s)ds \\
=& S * v - a * \int_0^t S(t-s)Av(s)ds \\
=& S * v - a * S * Av \\
=& S * (v - a * Av) \\
=& S * x = 1 * Sx,
\end{aligned}$$

Luego, después de diferenciar se obtiene que $v(t) = S(t)x$, así que $u = v$.

Finalmente, la dependencia continua de las soluciones sobre x se sigue directamente del acotamiento uniforme de $S(t)$ sobre intervalos compactos y del principio de acotamiento uniforme.

(ii) Suponemos ahora que (2.14) esta bien planteado y veamos que (2.14) admite una familia resolvente. En efecto, si (2.14) está bien planteado entonces podemos definir el operador solución para (2.14) por:

$$S(t)x := u(t; x), \quad x \in D(A), t \geq 0.$$

Por unicidad, $S(t)$ está bien definido y es lineal para cada $t \geq 0$, además $S(0)x = x$ para cada $x \in D(A)$ y $S(t)x$ es continuo sobre $\mathbb{R}_+$ para cada $x \in D(A)$.

Veamos que $S(t)$ es también uniformemente acotado sobre intervalos compactos. Razonamos por contradicción, esto es, asumir que existe $(t_n) \subset [0, T]$, $\quad (y_n) \subset D(A)$ con $\|y_n\| = 1$ tal que

$$\|S(t_n)y_n\| \geq n, \quad \textit{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, si $x_n := \dfrac{y_n}{n}$, claramente $x_n \in D(A)$ y $x_n \to 0$; por tanto

$$1 \leq \|S(t_n)x_n\| = \|u(t_n; x_n)\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, lo cual es una contradicción con la hipótesis que (2.14) está bien planteado. Por tanto $S(t)$ es uniformemente acotado sobre intervalos compactos; en consecuencia admite una extensión continua para cada $x \in X$, de esta manera $S(t)x$ es continua para cada $x \in X$.

Por otra parte, $AS(t)x$ es continuo sobre $[0, \infty)$ para cada $x \in X$,además se tiene

$$S(t)x = x + a * AS(t)x = x + Aa * S(t)x.$$

Como $S(t)$ es acotado se concluye que $R(a * S(t)) \subset D(A)$ y el operador $S(t) - I = Aa * S(t)$ es fuertemente continuo sobre $[0, \infty)$, en otras palabras, $u(t; x) = S(t)x$ es una solución débil de (2.14) para cada $x \in X$.

Finalmente para mostrar que A conmuta con $S(t)$, observése que para $x \in D(A)$, $u(t; Ax)$ y $Au(t; x)$ son soluciones debiles de (2.14), pero por la unicidad de soluciones se tiene:

$$S(t)Ax = u(t; Ax) = Au(t; x) = AS(t)x.$$

Corolario 3. *El problema (2.14) admite a los más una familia resolvente* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Observación.

Para el caso especial en que $a(t) = 1$ la familia resolvente $S(t)$ se convierte en el semigrupo C_0, e^{tA} generado por A.

Proposición 24. *Suponer que (2.14) admite una familia resolvente $S(t)$ y sea $f \in C(I; X)$.*

(i) Si $u \in C(i; X)$ es una solución débil de (2.14), entonces $S * f$ es continuamente diferenciable en i y además

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \;\; t \in I \tag{2.17}$$

(ii) Si $f \in W^{1,1}(J; X)$, entonces

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)ds, \;\; t \in I \tag{2.18}$$

es una solucion débil de (2.14).

(iii) Si $f \in W^{1,1}(I; D(A))$, entonces $u(t)$ definida por (2.18) es una solución fuerte de (2.14).

Demostración.

(i) Suponer que $S(t)$ es una resolvente para (2.14) y además u es solución débil de (2.14). Entonces,

$$\begin{aligned} 1 * u =& (S - A(a * S)) * u = S * u - A(a * S) * u \\ =& S * u - AS * (a * u) = S * [u - Aa * u] = S * f. \end{aligned}$$

es decir,

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \;\; t \in I.$$

(ii) Si $f \in W^{1,1}(I; X)$ entonces u definida en (2.18) es continua sobre J. Además,

$$a * u = a * Sf(0) + a * S * f'$$

para cada $t \in I$.

En virtud de la proposición (2.16) se tiene que $a * u \in D(A)$.

Resta probar que

$$u(t) = f(t) + A(a * u)(t) \quad \textit{sobre} \quad I$$

Entonces,

$$f + A(a * u) = f + Aa * Sf(0) + Aa * S * f'.$$

Puesto que $S(t)$ es resolvente para (2.14) se deduce:

$$\begin{aligned} f + A(a * u) ==&f + Sf(0) - f(0) + (S - I) * f' \\ =&f + Sf(0) - f(0) + S * f' - I * f' \\ =&f - f(0) - 1 * f' + u \\ =&u. \end{aligned}$$

Por tanto u es solución débil de (2.14).

(iii) Es una consecuencia directa de (ii) puesto que $S(t)$ conmuta con A.

Mencionamos algunos resultados y definiciones restantes que seran útiles para abordar el objetivo de este capítulo, sus demostraciones pueden ser consultadas en [11].

Recordemos que para una función $f \in L_{loc}([0,\infty); X)$, la transformada de Laplace de f, $\widehat{f}$, esta definida por $\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt := \lim\limits_{\tau \to +\infty} \displaystyle\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)dt.$

Definición 29. *La ecuación*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds$$

con $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *y tal que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t}|a(t)|dt < \infty$, $\forall \epsilon > 0$, *se denomina* ***parabólica*** *si se satisfacen las condiciones:*

a. $\widehat{a}(\lambda) \neq 0, 1/\widehat{a}(\lambda) \in \rho(A)$, *para todo* $Re(\lambda) > 0$.

b. Existe una constante $M \geq 1$ *tal que* $H(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(I - \widehat{a}(\lambda)A)^{-1}$ *satisface*

$$\|H(\lambda)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{para todo } \Re(\lambda) > 0.$$

Definición 30. *Sea* $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *tal que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t}|a(t)|dt < \infty \ \forall \epsilon > 0.$
$a(t)$ *se denomina* k***- regular*** *si existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$|\lambda^n \widehat{a}^{(n)}(\lambda)| \leq c|\widehat{a}(\lambda)| \quad \text{para todo } Re(\lambda) > 0,\ 0 \leq n \leq k.$$

Definición 31. *Considerar* $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *tal que* $\int_0^{+\infty} e^{-\epsilon t}|a(t)|dt < \infty$ *para todo* $\epsilon > 0$, *además*

$\widehat{a}(\lambda) \neq 0$ *para todo* $Re(\lambda) > 0$.

La función a se denomina θ***- sectorial*** *o simplemente sectorial si* $|\arg(\widehat{a}(\lambda))| \leq \theta$ *para todo* $\Re(\lambda) > 0$

Teorema 8. *Sea* X *un espacio de Banach,* A *un operador lineal cerrado en* X *con dominio denso* $D(A)$ *y* $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$*.Asumir que*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds$$

es parabólica y $a(t)$ *es* $k-$ *regular, para algún* $k \geq 1$*. Entonces existe una resolvente* $S \in C^{k-1}([0,\infty); B(X))$ *para la ecuación dada, además existe una constante* $M \geq 1$ *tal que*

$$||t^n S^n(t)|| \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad n \leq k-1 \tag{2.19}$$

$$||t^k S^{(k-1)} - s^k S^{(k-1)}(s)|| \leq M(t-s)\Big(1 + \ln\Big(\frac{t}{t-s}\Big)\Big), \quad 0 \leq s < t < \infty \tag{2.20}$$

son válidas

Corolario 4. *Sea* $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ $1-$ *regular y sectorial con* $\theta < \frac{\pi}{2}$*. Sea* A *un generador acotado de un semigrupo* C_0 $\{T(t), t \geq 0\}$ *en un espacio de Banach* X*. Entonces*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds$$

es parabólica y existe una resolvente acotada $S(t)$ *para este.*

Teorema 9. *Suponer* $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ $2-$ *regular, (2.14) parabólica y además* $\alpha \in (0,1)$*. Entonces*

i. Para cada $f \in C^\alpha_0(I; X)$ *existe una solución débil* $u \in C^\alpha_0(I; X)$ *para (2.14)*

ii. Para cada $f \in C^\alpha_0(I; X_A)$ *existe una solución fuerte* $u \in C^\alpha_0(I; X_A)$ *para (2.14).*

2.4. Existencia de solución

Consideremos el problema de Cauchy

$$D^{\beta}u(t) = \eta Au(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t), \quad u(0) = x; \;\; u'(0) = y, \;\; \beta \in (1,2), \, \eta > 0. \tag{2.21}$$

donde A es un operador lineal cerrado con dominio denso $D(A) = X_A \subset X$.

Definición 32. *Una función $u \in C(I;X)$ se denomina*

(a) Una solución fuerte de (2.21) sobre I si $u \in C(I;X_A) \cap C^2(I;X)$ y satisface (2.21).

(b) Una solución débil de (2.21) sobre I si $h_\beta * u \in C(I;X_A)$, donde

$$h_\beta(t) = \eta\phi_\beta(t) + (\phi_\beta * k)(t), \qquad \phi_\beta(t) := \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

y

$$u(t) = x + ty + (\phi_\beta * f)(t) + A((h_\beta * u)(t)).$$

Mostramos a continuación el principal resultado de esta sección teniendo en cuenta los anteriores resultados.

Teorema 10. *Consideremos*

$$D^{\beta}u(t) = \eta Au(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t)$$

$$u(0) = x; \;\; u'(0) = y, \;\; \beta \in (1,2), \, \eta > 0.$$

donde $f \in W^{1,1}(I;X_A)$, $k(t)$ es $3-$ regular y A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo acotado $\{T(t), t \geq 0\}$.
Si

$$\Big|\arg\Big(\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta}}\Big)\Big| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

entonces existe una única solución fuerte $u_\beta \in C(I;X_A) \cap C^2(I;X)$ de (2.21) dada por

$$u_\beta = e^t S_\beta(t)x + (e^t S_\beta * (-x + y - ty + \phi_\beta(t)f(0) + \phi_\beta * (f' - f)))(t)$$

Demostración.

Realizamos la demostración considerando varias etapas.

(i.) Considerando el operador de integración J^β sobre la ecuación (2.21) se tiene

$$u_\beta(t) = x + ty + (\phi_\beta * f)(t) + (\eta\phi_\beta + (\phi_\beta * k)(t)) * Au(t). \tag{2.22}$$

Si $\nu_\beta(t) = e^{-t}u_\beta(t)$ entonces la ecuación (2.22) se transforma en

$$\nu_\beta(t) = g(t) + (h * A\nu_\beta)(t) \tag{2.23}$$

donde $g(t) = xe^{-t} + te^{-t}y + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}f)(t)$ y $h(t) = \eta\phi_\beta e^{-t} + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}k)(t)$. Observar que $h(t)$ es θ sectorial ya que

$$\widehat{h}(\lambda) = \frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta} \Rightarrow |\arg \widehat{h}(\lambda)| \le \theta < \frac{\pi}{2}$$

(ii.) Mostremos ahora que h es $3-$ regular, para ello usamos la regularidad de k. Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{h}'(\lambda) =& -\beta\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta+1}} + \frac{\widehat{k}'(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta} \\ |\lambda\widehat{h}'(\lambda)| =& \Big|\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}\Big|\Big|\frac{-\beta\lambda}{\lambda+1} + \frac{\lambda\widehat{k}'(\lambda+1)}{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}\Big| \end{aligned}$$

Como k es 3 regular entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \widehat{h}'(\lambda) \le& \Big|\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}\Big|\Big\{|\frac{\beta\lambda}{\lambda+1}| + c|\frac{\lambda}{\lambda+1}||\frac{\widehat{k}(\lambda+1)}{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}|\Big\} \\ \le& (\beta + c)|\widehat{h}(\lambda)| \end{aligned}$$

Ahora,

$$\widehat{h}''(\lambda) = \frac{\beta(\beta+1)(\eta + \widehat{k}(\lambda+1))}{(\lambda+1)^{\beta+2}} - 2\beta\frac{\widehat{k}'(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta+1}} + \frac{\widehat{k}''(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}$$

de donde se deduce

$$|\lambda^2\widehat{h}''(\lambda)| \le \Big|\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}\Big|\Big\{\beta(\beta+1)\Big|\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\Big| + 2\beta c\Big|\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\Big|\Big|\frac{\widehat{k}(\lambda+1)}{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}\Big| +$$

$$c\Big|\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\Big|\Big|\frac{\widehat{k}(\lambda+1)}{\eta+\widehat{k}(\lambda+1)}\Big|\Big\}$$

luego,

$$|\lambda^2\widehat{h}''(\lambda)| \leq (\beta^2+\beta+2\beta c+c)|\widehat{h}(\lambda)| = d|\widehat{h}(\lambda)|,$$

donde $d = \beta^2+\beta+2\beta c+c$.

Finalmente,

$$\widehat{h}'''(\lambda) = \frac{-\beta(\beta+1)(\beta+2)(\eta+\widehat{k}(\lambda+1))}{(\lambda+1)^{\beta+3}} + 3\frac{\beta(\beta+1)\widehat{k}'(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta+2}} - \frac{3\beta\widehat{k}''(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta+1}} + \frac{\widehat{k'''}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta}}$$

implica

$$|\lambda^3\widehat{h}'''(\lambda)| \leq \Big|\frac{\eta+\widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^{\beta}}\Big|\Big\{\beta(\beta+1)(\beta+2)+3\beta(\beta+1)c+3\beta c+c\Big\} = e|\widehat{h}(\lambda)|,$$

siendo $e = \beta(\beta+1)(\beta+2)+3\beta(\beta+1)c+3\beta c+c$.

Por tanto $h(t)$ es 3- regular.

Teniendo en cuenta lo anterior, observar que el corolario 4 asegura que la ecuación (2.23) es parabólica y en virtud del teorema 8, (2.23) admite una resolvente acotada $S_\beta \in C(I;B(X)) \cap C^2(I;B(X))$ que satisface las ecuaciones (2.19) y (2.20) donde

$$\begin{cases} S_\beta(t)x = x + (h * AS_\beta(x))(t), & x \in X_A \\ S'_\beta(t)x = h(t)Ax + (Ah * S'_\beta(x))(t), & x \in X_A \\ S''_\beta(t)x = h'(t)Ax + (Ah' * S'_\beta(x))(t), & x \in X_A, \end{cases} \tag{2.24}$$

ó también podemos escribir $S'_\beta(t)x$, donde $h(t)$ es diferenciable, en la forma

$$S'_\beta(t)x = (h' * AS_\beta x)(t), \quad x \in X_A,$$

concluyendo que $S'_\beta(0) = 0$.

(iii.) Sabemos que $S_\beta \in C(I; B(X)) \cap C^2(I; B(X))$, y de acuerdo a la proposición 24, la solución de (2.23) está dada por

$$\nu_\beta(t) = \frac{d}{dt}(S_\beta * g)(t),$$

además, por hipótesis $f \in W^{1,1}(I; X_A)$, así que

$$g(t) = \{(x + ty)e^{-t} + e^{-t}(\phi * f)(t)\} \in W^{1,1}(I; X_A).$$

Por tanto

$$\nu_\beta(t) = \frac{d}{dt}(S_\beta * g)(t) \Leftrightarrow \nu_\beta(t) = S_\beta(t)g(0) + \int_0^t S_\beta(t-s)g'(s)ds, \quad t \in I$$

es una solución fuerte de (2.23).

Además, como $g(t) = xe^{-t} + te^{-t}y + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}f)(t)$ tenemos

$$g'(t) = e^{-t}\{-x + y - ty + \phi_\beta(t)f(0) + (\phi_\beta * (f' - f))(t)\}; \quad g(0) = x,$$

y como $\nu_\beta(t) = e^{-t}u_\beta(t)$ entonces podemos escribir $u_\beta(t)$ en la forma

$$u_\beta(t) = e^t S_\beta(t)x + e^t S_\beta * \{-x + y - ty + \phi_\beta(t)f(0) + (\phi_\beta * (f' - f))\}(t) \tag{2.25}$$

(iv.) Mostremos ahora que $u_\beta(t)$ dada en (2.25) es solución de (2.21).

Entonces

$$Du_\beta(t) = e^t S'_\beta(t)x + e^t S_\beta(t)y + e^t S_\beta(t) * \Big(-y + \phi_{\beta-1}(t)f(0) + (\phi_{\beta-1} * (f' - f))(t)\Big)$$

$$D^2u_\beta(t) = e^t S''_\beta(t)x + e^t S'_\beta(t)x + e^t S'_\beta(t)y + e^t S_\beta(t)y - y + \phi_{\beta-1}(t)f(0) + (\phi_{\beta-1} * (f' - f))(t)$$
$$+ (e^t S'_\beta(t) + e^t S_\beta(t)) * \Big(-y + \phi_{\beta-1}(t)f(0) + \phi_{\beta-1} * (f' - f)(t)\Big).$$

Teniendo en cuenta que $D^\beta u_\beta(t) = \phi_{2-\beta}(t) * D^2u_\beta(t)$ se tiene

$$D^\beta u_\beta(t) = \phi_{2-\beta}(t)*e^tS''_\beta(t)x+\phi_{2-\beta}(t)*e^tS'_\beta(t)(x+y)+e^tS_\beta(t)*(\phi_{\beta-1}(t)f(0)+f'-f)(t).$$

Sin embargo, para $z \in X_A$

$$\begin{aligned}
e^tS_\beta(t)z &= e^tz + (\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t)) * Ae^tS_\beta(t)z \\
e^tS'_\beta(t)z &= (\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t))Az + A(\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t)) * e^tS'_\beta(t)z \\
e^tS''_\beta(t)z &= [(\eta\phi_{\beta-1}(t) - \eta\phi_\beta(t)) + (\phi_{\beta-1}(t) - \phi_\beta(t)) * k(t)]Az \\
&+ A[(\eta\phi_\beta(t) - \eta\phi_\beta(t)) + (\phi_{\beta-1}(t) - \phi_\beta(t)) * k(t)] * e^tS'_\beta(t)z.
\end{aligned}$$

De esta manera para $D^\beta u_\beta(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
D^\beta u_\beta(t) &= \phi_{2-\beta}(t) * \{[(\eta\phi_{\beta-1}(t) - \eta\phi_\beta(t)) + (\phi_{\beta-1}(t) - \phi_\beta(t)) * k(t)]Az \\
&+ A[(\eta\phi_\beta(t) - \eta\phi_\beta(t)) + (\phi_{\beta-1}(t) - \phi_\beta(t)) * k(t)] * e^tS'_\beta(t)z\} \\
&+ \phi_{2-\beta}(t) * \{(\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t))A(x+y) + \\
&+ A(\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t)) * e^tS'_\beta(t)(x+y)\} \\
&+ [e^t + (\eta\phi_\beta(t) + \phi_\beta(t) * k(t)) * Ae^tS_\beta(t)] * [\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t)],
\end{aligned}$$

pero $e^t * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t) = f(t)$, así que

$$\begin{aligned}
D^\beta u_\beta(t) &= f(t) + \eta A\{x + ty + \phi_1(t) * e^tS'_\beta(t)x + \phi_2(t) * e^tS'_\beta(t)y \\
&+ \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t)\} \\
&+ k(t) * \{x + ty + \phi_1(t) * e^tS'_\beta(t)x + \phi_2(t) * e^tS'_\beta(t)y \\
&+ \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t)\} \\
&= f(t) + \eta AU(t) + k(t) * AU(t),
\end{aligned}$$

donde

$$U(t) = x+ty+\phi_1(t)*e^tS'_\beta(t)x+\phi_2(t)*e^tS'_\beta(t)y+\phi_\beta(t)*e^tS_\beta(t)*(\phi_{\beta-1}(t)f(0)+f'-f)(t).$$

Finalmente veamos que $U(t) = u_\beta(t)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} U(t) &= x + ty + \phi_1(t) * e^tS'_\beta(t)x + \phi_2(t) * e^tS'_\beta(t)y + \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - \\ &= x + ty + \phi_1(t) * [D(e^tS_\beta(t)) - e^tS_\beta(t)]x + \phi_2(t) * [D(e^tS_\beta(t)) - e^tS_\beta(t)]y \\ &+ \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t) \\ &= x + ty + e^tS_\beta x - x - \phi_1(t) * e^tS_\beta(t)x + \phi_1(t) * [e^tS_\beta(t)y - y - \phi_1(t) * e^tS_\beta(t)y] \\ &+ \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t) \\ &= ty + e^tS_\beta(t)x - e^tS_\beta(t) * x + e^tS_\beta(t) * y - ty - \phi_1(ty) * e^tS_\beta(t)y \\ &+ \phi_\beta(t) * e^tS_\beta(t) * (\phi_{\beta-1}(t)f(0) + f' - f)(t) \\ &= e^tS_\beta(t)x + e^tS_\beta(t) * \{-x + y - ty + \phi_\beta(t)f(0) + \phi_\beta * (f' - f)(t)\} \\ &= u_\beta(t). \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra una solución débil de (2.21).

Corolario 5. *Considerar $f \in W^{1,1}(I;X)$ en lugar de $f \in W^{1,1}(I;X_A)$ en el teorema 10.Entonces existe una única solución débil $u_\beta(t) \in C(I;X)$ de (2.21) dada por (2.25).*

Demostración

Por hipótesis $f \in W^{1,1}(I;X)$, luego

$$xe^{-t} + te^{-t}y + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}f)(t) = g(t) \in W^{1,1}(I;X).$$

Teniendo en cuenta la proposición 24 se tiene que

$$\nu_\beta(t) = S_\beta(t)g(0) + \int_0^t S_\beta(t-s)g'(s)ds, \quad t \in I$$

es una solución débil de (2.22) tal que

$$h * \nu_\beta \in C(I;X_A)$$

con

$$\nu_\beta(t) = g(t) + (h * A\nu_\beta)(t)$$

y donde

$$h(t) = e^{-t}\{\eta\phi_\beta + (\phi_\beta * k)(t)\}, \quad \nu_\beta(t) = e^{-t}u_\beta(t).$$

Por tanto si $h_\beta = \eta\phi_\beta + (\phi_\beta * k)(t)$ entonces $h_\beta * \nu_\beta \in C(I; X_A)$ y

$$u_\beta(t) = x + ty + (\phi_\beta * f)(t) + A(h_\beta * \nu_\beta)$$

es una solución débil de (2.21).

Observación.

En los artículos [7], [9] se demuestra que si $u_\beta(t)$ es solución de la ecuación (2.21) entonces $u_\beta \to u_2$, cuando $\beta \to 2^-$, donde u_2 es la solución del problema lineal no homogéneo de segundo orden. La estrategia para demostrar este resultado consiste en imponer hipótesis sobre el operador A de modo que A sea el generador de una familia coseno.

Capítulo 3

La solución y algunas propiedades

Según lo realizado en el capítulo anterior, podemos expresar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} D^\beta u(t) & = \eta A u(t) + \Big(\displaystyle\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t) \\ u(0) & = x;\;\; u'(0) = y = 0,\;\; \beta \in (1,2),\, \eta > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

a través familias resolventes. Mas aún, se tiene una expresión explícita para tal solución. Sin embargo, es de interes analizar el comportamiento de la solución u_β junto con el de $D^\beta u_\beta$ cuando $\beta \to 1^+$.

Así, en orden a analizar tales propiedades enunciamos algunos resultados basados en la Transformada de Laplace-Stieltjes.

Teorema 11. *Suponer que $f \in W^{1,1}(I; X_A)$, $k(t)$ es 2-regular y A el generador infinitesimal de un semigrupo acotado $\{T(t), t \geq 0\}$. Si*

$$\Big|\arg\Big(\frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}\Big)\Big| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

entonces existe una única solución fuerte $u_1 \in C(I; X_A) \cap C^1(I; X)$ de la ecuación (3.1) dada por

$$u_1(t) = e^t S_1(t)x + (e^t S_1 * (-x + f(0) + 1 * (f' - f)))(t) \tag{3.2}$$

donde $S_1(t) \in C(I; B(X))$ *con núcleo* $a(t) = \eta e^{-t} + e^{-t} * e^{-t}k(t)$.

Observación

Si en el teorema anterior se considera $f \in W^{1,1}(I; X)$ entonces existe una única solución débil de (3.1) dada por (3.2).La demostración de la existencia de la solución de u_1 es similar a la expuesta en el teorema 10 y corolario 5 del capítulo anterior.

El siguiente teorema de aproximación es una de las consecuencias del teorema de Representación de Riesz-Stieljtes, su demostración puede ser consultada en [3] (ver apéndice).

Teorema 12. ***(Teorema de Aproximación)***
Suponer que $F_n \in Lip([0,\infty); X)$ *con* $||F_n||_{Lip} \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $r_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_n(t)$.
Las siguientes proposiciones son equivalentes

(i) Existen $a, b > 0$ *tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(a + kb)$ *existe para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Existe $F \in Lip([0,\infty); X)$ *con* $||F||_{Lip} \leq M$ *tal que la sucesión* $\{r_n(\lambda)\}$ *converge uniformente a* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t)$ *sobre conjuntos compactos. Es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t), \quad \lambda > 0.$$

(iii) Existe $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

(iv) Existe $F \in Lip([0,\infty); X)$ *con* $||F||_{Lip} \leq M$ *tal que la sucesion* $F_n(t)$ *converge uniformemente a* $F(t)$ *sobre conjuntos compactos.*

Mostramos a continuación los principales resultados de este capítulo basandonos en algunos resultados del capítulo 2 y las proposiciones anteriores.

Teorema 13. *Asumiendo que las soluciones de los problemas de valor inicial (2.21) y (3.1) existen entonces*

$$\lim_{\beta\to 1+} u_\beta(t) = u_1(t).$$

Demostración

Puesto que

$$u_\beta(t) = e^t S_\beta(t)x + (e^t S_\beta * (-x + f(0) + 1 * (f' - f)))(t)$$

es la solución del problema (2.21) y

$$u_1(t) = e^t S_1(t)x + (e^t S_1 * (-x + f(0) + 1 * (f' - f)))(t)$$

es la solución del problema (3.1), definimos para cada $x \in X_A$ la sucesión

$$F_\beta(t) := S_\beta(t)x - x, \qquad t \geq 0, \quad \beta \in [1, 2).$$

Veamos que $F_\beta \in Lip([0, \infty); X_A)$.

Claramente $F_\beta(0) = 0$.

Por otra parte,

$$||F_\beta(t+h) - F_\beta(t)|| = ||S_\beta(t+h)x - S_\beta(t)x|| = \left\| \int_t^{t+h} (S_\beta * h_\beta)(u) Axdu \right\|,$$

donde $h_\beta(u) = \eta\phi_\beta e^{-u} + (e^{-u}\phi_\beta * e^{-u}k)(u)$.

Sabemos que

$$\left\| \int_t^{t+h} (S_\beta * h_\beta)(u) ydu \right\| \leq \int_t^{t+h} ||(S_\beta * h_\beta)(u)y|| du \quad ; \quad Ax =: y,$$

y como $||S_\beta(t)|| \leq M$ para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$||S_\beta * h_\beta(u)y|| \leq ||S_\beta(u)y|| ||h_\beta||_1 \leq M||y|| \int_0^T ||h_\beta(u)|| du \leq c||y||.$$

Luego

$$\left\| \int_t^{t+h} (S_\beta * h_\beta)(u) ydu \right\| \leq \int_t^{t+h} ||(S_\beta * h_\beta(u) ydu)|| \leq c||y|| \int_t^{t+h} du = c||y||h$$

y en consecuencia

$$||F_\beta(t+h) - F_\beta(t)|| \leq c||y||h.$$

Por tanto

$$\sup_{t,h \geq 0} \frac{||F_\beta(t+h) - F_\beta(t)||}{|h|} < \infty,$$

es decir $F_\beta \in Lip([0,\infty); X_A)$ como se queria probar.

Por otra parte, $(\phi_\beta * (f' - f))(t) \to \phi_1 * (f' - f))(t)$ cuando $\beta \to 1^+$. En efecto, si $w = f' - f$ entonces $\phi_\beta w(t) \to \phi_1 w(t)$ cuando $\beta \to 1^+$, además $\|(\phi_\beta(t)\| \leq c$ para todo $t \in [0,\tau]$ y para todo $\beta > 1$, luego por el teorema de convergencia dominada se tiene que $(\phi_\beta * (f' - f))(t) \to \phi_1 * (f' - f))(t)$ cuando $\beta \to 1^+$.
Veamos ahora que la transformada de Laplace Stieljes de F_β tiende a la transformada de F_1 cuando $\beta \to 1^+$, lo cual es equivalente a mostrar que $\widehat{S}_\beta(\lambda) \to \widehat{S}_1(\lambda)$. Entonces, según lo realizado en la demostración del problema (2.21) se tiene

$$\nu_\beta(t) = g_\beta(t) + (h_\beta * A\nu_\beta)(t)$$

donde $g_\beta(t) = xe^{-t} + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}f)(t)$ y $h_\beta(t) = \eta\phi_\beta e^{-t} + (e^{-t}\phi_\beta * e^{-t}k)(t)$.
Luego,

$$\widehat{\nu_\beta}(\lambda) = \widehat{g}_\beta(\lambda) + (\widehat{h_\beta * A\nu_\beta})(\lambda)$$

donde

$$\widehat{h}_\beta(\lambda) = \frac{\eta + \widehat{k}(\lambda+1)}{(\lambda+1)^\beta}.$$

Por tanto,

$$\widehat{e^t S_\beta(t)}(\lambda) = \widehat{\nu_\beta}(\lambda) = \widehat{g}_\beta(\lambda)(I - \widehat{h_\beta}A)^{-1}(\lambda)$$

y según lo mostrado anteriormente, se tiene que para $\beta \to 1^+$, , $\widehat{e^t S_\beta(t)}(\lambda) \to \widehat{e^t S_1(t)}(\lambda)$.
Finalmente, las hipótesis del teorema de aproximación se satisfacen para $F_\beta(t)$ y $F_1(t) := S_1(t)x - x$, de este modo podemos concluir que $F_\beta(t)$ converge uniformente a $F_1(t)$ cuando $\beta \to 1^+$ sobre $I = [0,T]$. Como consecuencia de esto, $S_\beta(t) \to S_1(t)$ cuando $\beta \to 1^+$ sobre $I = [0,T]$.

Concluimos entonces que la convergencia de $u_\beta(t)$ a $u_1(t)$ cuando $\beta \to 1^+$ es inmediata de las construcciones de éstas, ya que

$$u_\beta(t) = e^t S_\beta(t)x + (e^t S_\beta * (-x + \phi_\beta(t)f(0) + \phi_\beta * (f' - f)))(t) \quad ; t \in I$$

y

$$u_1(t) = e^t S_1(t)x + (e^t S_1 * (-x + f(0) + 1 * (f' - f)))(t) \quad ; t \in I.$$

Teorema 14. *Si la solución del problema de valor inicial*

$$D^\beta u(t) = \eta A u(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Au(s)ds\Big) + f(t)$$
$$u(0) = x; \;\; u'(0) = y = 0, \;\; \beta \in (1,2),\, \eta > 0.$$

existe con $x \in D(A^2)$ *y* $f \in W^{1,1}(I; D(A^2))$ *entonces*

$$\lim_{\beta \to 1^+} D^\beta u_\beta(t) = Du_1(t).$$

Demostración

$$\begin{aligned}
||D^\beta u_\beta(t) - Du_1(t)|| =& ||\eta(Au_\beta(t) - Au_1(t)) + k * (Au_\beta(s) - Au_1(s))(t)|| \\
\leq& \eta ||Au_\beta(t) - Au_1(t)|| + ||k * (Au_\beta(s) - Au_1(s))(t)|| \\
\leq& \eta ||Au_\beta(t) - Au_1(t)|| + \sup_{t \in J} |k(t)| \int_0^T ||Au_\beta(s) - Au_1(s)(t)||dt.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$Au_\beta = A\Big(e^t S_\beta(t)x + (e^t S_\beta * (-x + \phi_\beta(t)f(0) + \phi_\beta * (f' - f)))(t)\Big),$$

luego si $Ax = x_0$ y $Af = g \in W^{1,1}(I; X_A)$ entonces

$$Au_\beta = e^t S_\beta(t)x_0 + (e^t S_\beta * (-x_0 + \phi_\beta(t)g(0) + \phi_\beta * (g' - g)))(t). \tag{3.3}$$

Según el teorema 10 la ecuación (3.3) es una solución fuerte del problema de valor inicial

$$D^\beta w = \eta A w(t) + \Big(\int_0^t k(t-s)Aw(s)ds\Big) + g(t), \quad w(0) = x_0, \quad w'(0) = 0,$$

mas aún, el teorema 10 afirma que ésta solución Au_β converge a $w_1 \in X_A$ cuando $\beta \to 1^+$. Tenemos entonces que $Au_\beta \to w_1$ y $u_\beta \to u_1$; sin embargo, por ser A es un operador lineal cerrado se tiene que $Au_\beta \to w_1 = Au_1$, así $||(Au_\beta(t) - Au_1(t))|| \to 0$ cuando $\beta \to 1^+$ para $t \in I$.

Luego, $||D^\beta u_\beta(t) - Du_1(t)|| \to 0$ cuando $\beta \to 1^+$.

Apéndice A

Apéndice

Definición 33. *Sea $F \in Lip([0,\infty);X)$. Si*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t)$$

converge para algún valor $\lambda \in \mathbb{R}_+$, entonces la función G definida por

$$G(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t)$$

recibe el nombre de ***transformada de Laplace-Stieltjes*** *de F*

Observación

(a) Notar que si $f \in L_\infty([0,\infty);X)$ entonces la función $F(t) := \int_0^t f(s)ds$ está en $Lip([0,\infty);X)$, así

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

y por tanto la tranformada de Laplace Stieltjes se reduce a la transformada de Laplace.

(b) La transformada de Laplace tambien puede ser considerada para $f \in Lp((0,\infty);X)$ y la transformada de Laplace-Stieltjes para funciones F de variación p-acotadas. Sin embargo, restringimos tal discusión considerando para nuestro propósito funciones $f \in L\infty([0,\infty);X)$ y $F \in Lip([0,\infty);X)$.

La clave de la teoria de la transformada de Laplace es la representación de Riesz-Stieltjes para operadores lineales acotados de $L_1(0,\infty)$ en X.

Teorema 15. ***(Representación de Riesz-Stieltjes)***
Existe un isomorfismo isométrico $\psi : Lip([0,\infty);X) \to \mathcal{L}(L_1(0,\infty),X)$ *dado por* $\psi(F) = T$ *donde* $Tg := \int_0^\infty g(t)dF(t)$ *para todas las funciones continuas* $g \in L_1(0,\infty)$ *y* $T\chi_{[0,t]} = F(t)$*, para todo* $t \geq 0$.

Demostración

Sean $F \in Lip_0([0,\infty);X)$ y E el espacio generado de todas las funciones con soporte compacto y continuas.

Definimos el operador $A_F : E \to X$ como sigue:

$$A_F g := \int_0^\infty g(s)dF(s).$$

Observar que $\|A_F g\| \leq \|F\|_{Lip}\|g\|_1$ para toda g en E.

Ahora, como E es denso en $L^1(0,\infty)$, existe una única extensión de A_F en $\mathcal{L}(L_1(0,\infty),X)$ que denotaremos por T, es decir, $T : L^1(0,\infty) \to X$ tal que $T|E = A_F$.

Veamos ahora que la aplicación ψ es inyectiva.

En efecto, si consideramos el operador $T = 0$ entonces

$$0 = T\chi_{[0,t]} = \int_0^\infty \chi_{[0,t]}dF(t) = \int_0^t dF(s) = F(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Luego ψ es inyectiva y se tiene que $\|T\| \leq \|F\|_{Lip}$.

Más aún, si g es una función continua en $L^1(0,\infty)$ entonces $g = \lim_{t\to\infty} g\chi_{[0,t]}$ en $L^1(0,\infty)$.

Luego,

$$\int_0^\infty g(s)dF(s) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t g(s)dF(s) = \lim_{t\to\infty} Tg\chi_{[0,t]} = Tg.$$

Ahora, para probar que ψ es sobreyectiva consideremos $A \in \mathcal{L}(L_1(0,\infty),X)$.

Se define la aplicación $F : [0,\infty) \to X$ por

$$F(t) := A\chi_{[0,t]}.$$

Veamos que $F \in Lip([0,\infty);X)$ para todo $t \geq 0$. En efecto,

$$\|F(t) - F(s)\| = \|A\chi_{[0,t]}\| \leq \|A\|\|\chi_{[0,t]}\|_1 = \|A\||t-s|,$$

luego

$$\frac{F(t)-F(s)}{|t-s|} \leq \|A\| \Rightarrow \|F\|_{Lip} \leq \|A\|.$$

Por tanto $F \in Lip([0,\infty);X)$.

Como $\{\chi_{[0,t]} : t \geq 0\}$ son totales en $L^1(0,\infty)$ podemos concluir que $A = T$.Además $\|T\| = \|F\|_{Lip}$ para toda $F \in Lip_0([0,\infty);X)$.

Bibliografía

[1] Alkemade,J.A.H., *on a differential equationmand the Laplace-Stieltjes transform in the theory of linear positive operators.* 1984.

[2] Bautista A.I., Palechor L.Y. *Fórmula local de Taylor para funciones de la clase $AC([a, b])$, usando derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.* Trabajo de Grado, Universidad del Cauca, 2008.

[3] Boris B. Neubrander F. *Laplace Transform methods for Evolution Equations.* Preprint, Louisiana State University, Baton Rouge,USA, 1995.

[4] H.Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espacios de Hilbert.* Math. Studies 5, North-Holland, Amsterdam (1973).

[5] E. Bazhlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* Tesis Doctorado,Departamento de Matemáticas, universidad de Tecnologia de Einhoven,2001.

[6] E. Brain Davies, *Spectral Theory.* Department of Mathematics, King's College, London, 2004.

[7] El-Sayed,A.M.A., y Mohamed Herzallah,A.E, *Continuation and maximal regularity of a arbitrary(fractional) orden evolutionary integro-differential equation* .Journal of mathematical analysis and applications, 296 (2004),340-350.

[8] El-Sayed,A.M.A., y Mohamed Herzallah,A.E, *Continuation and maximal regularity of a arbitrary(fractional) orden evolutionary integro-differential equation* .Appliable Analysis, vol 84 (2005),11,1151-1164.

[9] El-Sayed,A.M.A., y M. Gaber *On the finite Caputo and finite Riesz derivatives* . Electronic Journal of Theoretical Physics, vol 3,12,2006.

[10] Kolmogorov A.N., Fomín,S.V. *Elementos de la teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial Nauka. Moscú, 1989.

[11] J.Pruss., *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Verlag-Birkauser, Basel-BostonBerlin,1983.

[12] M.Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent,* Part II. Geophys. J.R Astr.Soc 13 (1967), 529-539.

[13] M.Caputo, *Elasticitá eDissipazione.* ZAnichelli, Bologna (1969). (in Italian: Elasticity ans Dissipation).

[14] Miao Li, Quan Zheny, *On spectral inclusions and aprroximations of α-times resolvent families*, Semigroups Forum,vol 69 (2004), 356-368.

[15] Montoya C.D. *Resolución del problema de Cauchy para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Riemann-Liouville.* Trabajo de Grado, Universidad del Cauca, 2008.

[16] Natanson, *Theory Functional Analysis.* Springer-Verlag,Berlin,1983.

[17] Pazy,A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag,Berlin,1983.

[18] Prúdnikov A.P. Bríchkov Y.A. Marichév O.I. *Integrales y series. Funciones Especiales.* Editorial Nauka, Moscú, 1983.

[19] Samko, S.G., Kilbas, A.A. Marichév, O.I. *Fractional integrals and derivatives, theory and applications.* Gordon and Breach, Asterdam [Engl. Transl. de Ruso, Nauka i Tekhnika,Minsk] 1987.

[20] Stojanović, M., *Existence-Uniqueness result for a nolineaar n-term fractional equation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications,353(2009) 244-255.

[21] W.Arendt., *Vector- valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Israel Journal of Mathematics, vol 59, 3, 1987.

[22] W.Arendt., C.J.K Batty., M. Hieber., F. Neubrander *Vector- valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Birkhauser,2010.